Calculabilité et décidabilité : TD4

Licence Info 3 - Michele Pagani
28 février 2013

1 Éléments de théorie de la calculabilité

On rappelle les définitions suivantes.

1. Une fonction partielle $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}_\perp$ est *WHILE calculable* ssi il existe un programme `WHILE` `P` tel que $f = [\![\mathtt{P}]\!]$, c.à-d. pour tout $\mathtt{d}, \mathtt{e} \in \mathbb{D}$:
   - Si $f(\mathtt{d}) = \perp$, alors $[\![\mathtt{P}]\!](\mathtt{d}) = \perp$.
   - Si $f(\mathtt{d}) = \mathtt{e} \in \mathbb{D}$, alors $[\![\mathtt{P}]\!](\mathtt{d}) = \mathtt{e} \in \mathbb{D}$.
2. Un ensemble $A \subseteq \mathbb{D}$ est *WHILE décidable* ssi il existe un programme `WHILE` `P` tel que $[\![\mathtt{P}]\!](\mathtt{d}) \downarrow$ pour tout $d \in \mathbb{D}$, et en plus $d \in A$ ssi $[\![\mathtt{P}]\!](\mathtt{d}) = \mathtt{true}$.
3. Un ensemble $A \subseteq \mathbb{D}$ est *WHILE semi-décidable* ssi il existe un programme `WHILE` `P` tel que pour tout $d \in \mathbb{D}$, $d \in A$ ssi $[\![\mathtt{P}]\!](\mathtt{d}) = \mathtt{true}$.
4. Un ensemble $A \subseteq \mathbb{D}$ est *WHILE dénombrable* ssi soit $A = \emptyset$ soit il existe un programme `WHILE` `P` tel que pour tout $d \in \mathbb{D}$, $[\![\mathtt{P}]\!](\mathtt{d}) \downarrow$ et $A = \{[\![\mathtt{P}]\!](\mathtt{d})\ ;\ \mathtt{d} \in \mathbb{D}\}$.

Exercice 1. Écrire un programme `listepair` qui décide l'ensemble des listes contenant un nombre pair d'éléments.

Exercice 2. Étant donnés deux sous-ensembles $A, B \subseteq \mathbb{D}$, prouver que si A et B sont décidables alors $A \cap B$ est decidable.

Exercice 3. Prouver que l'ensemble des programmes calculant la fonction identité est `WHILE` indécidable.

Exercice 4. Prouver que l'ensemble des programmes calculant une fonction totale est `WHILE` indécidable.

Exercice 5. Prouver que l'ensemble de `WHILE`-programmes

$$A = \{\mathtt{P}\ ;\ \exists n \in \mathbb{N}, [\![\mathtt{P}]\!](\underline{n}) = \underline{n} \text{ et l'exécution de } \mathtt{P} \text{ change au plus } n \text{ fois le store sur l'entrée } \underline{\mathtt{n}}\}$$

est indécidable.