Calculabilité et décidabilité : TD1

Licence Info 3 - Michele Pagani

18 et 25 janvier 2013

Essentiellement tout objet mathématique est soit un nombre, soit un ensemble, soit une fonction. Dans ce TD on va rappeler des propriétés élémentaires des deux derniers, essentielles pour la suite du cours. Comme texte de référence on suggère fortement la lecture du poly du cours de "*Mathématiques discrètes*" de Laurent Regnier

`http://iml.univ-mrs.fr/~regnier/enseignement/MD1/`

et l'appendice A (sections A.1, A.2, A.3, A.6, A.7) du livre "*Computability and Complexity*" de Neil Jones

`http://www.diku.dk/~neil/comp2book2007/book-whole.pdf`

1 Ensembles

Intuitivement, un ensemble est une collection *non ordonnée* et *sans répétitions* d'objets. Si X est un ensemble et x un objet, on note $x \in X$ (respectivement, $x \notin X$) pour "x appartient à X" (respectivement, pour "x n'appartient à X"), ce que l'on peut dire aussi "x est un élément de X".
Exemples d'ensembles qu'on utilise :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{N}: &\quad \text{ensemble des nombres naturels, e.g. } 0, 1, 2, 3, \dots. \\
\mathbb{Z}: &\quad \text{ensemble des nombre entiers, e.g. } 0, 1, -1, -3, 2 \dots. \\
\mathbb{Q}: &\quad \text{ensemble des nombres rationels, e.g. } 2, 1/3, -400, 3.4, \dots. \\
\mathbb{R}: &\quad \text{ensemble des nombres réels, e.g. } 2.1, 1/3, -400, \pi, e, \dots. \\
\mathbb{R}^+: &\quad \text{ensemble des nombres réels positifs, e.g. } 2.1, 1/3, 400, \pi, e, \dots. \\
\{0,1\}^*: &\quad \text{ensemble des suites finies de 0 et 1, e.g. } \epsilon, 00010, 11, 01011, \dots. \\
\mathbb{D}: &\quad \text{ensemble des arbres binaires, e.g. } \mathtt{nil}, (\mathtt{nil}.(\mathtt{nil}.\mathtt{nil})), \dots.
\end{aligned}
$$

On dit qu'un ensemble X est un *sous-ensemble* d'un ensemble Y, ou est *inclus* ou *contenu* dans Y (notation : $X \subseteq Y$) quand tout élément de X est aussi élément de Y. On dénote par $\emptyset$ l'*ensemble vide*, qui ne contient aucun élément. Quelques constructions élémentaires sur les ensembles, avec comme exemples $X = \{1, 5, 3\}$, $Y = \{1, 3, 8, 0\}$:

$\mathfrak{P}(X)$: ensemble de tous sous-ensembles de X
 e.g. $= \{\emptyset, \{1\}, \{5\}, \{3\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{3, 5\}, \{1, 5, 3\}\}$

$X \cup Y$: *union* de X et Y, i.e. ensemble des objets appartenant soit à X, soit à Y
 e.g. $= \{0, 1, 3, 5, 8\}$

$X \cap Y$: *intersection* de X et Y, i.e. ensemble des objets appartenant à X et à Y
 e.g. $= \{1, 3\}$

$X \setminus Y$: *soustraction* de Y à X, i.e. ensemble des objets de X qui n'appartiennent pas à Y
 e.g. $= \{5\}$

$X \times Y$: *produit cartésien* de X avec Y, i.e. ensemble des couples dont le premier élément est dans X et le deuxième élément est dans Y
 e.g. $= \{(1, 1), (1, 3), (1, 8), (1, 0), (3, 1), (3, 3), (3, 8), (3, 0), (5, 1), (5, 3), (5, 8), (5, 0)\}$

Dans le cas $X \subseteq Y$ on appelle $Y \setminus X$ le *complément de X par rapport à Y*. On dit tout simplement "complément de X" et on écrit $\overline{X}$, lorsque l'ensemble Y est clair par le contexte.

Exercice 1. Calculer les ensembles suivants :

1. $\mathfrak{P}(\mathbb{N} \cap \{3.1, \pi, 2\})$,
2. $\mathbb{N} \setminus \mathbb{R}$,
3. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$,
4. $\mathfrak{P}(\emptyset)$,
5. $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\emptyset))$,
6. $(\{a, b, c\} \times \{b, a\}) \cap (\{a, b\} \times \{b, a, c\})$.

Exercice 2. Pour chacune des assertions suivantes dire si elles sont vraies ou fausses (pour n'importe quel ensemble X, Y et Z) et si vrai donner une démonstration, si faux donner un contre-exemple :

1. $\emptyset \subseteq X$,
2. $\emptyset \in X$,
3. $X \in \mathfrak{P}(X)$,
4. $X \subseteq \mathfrak{P}(X)$,
5. $\mathfrak{P}(X \cap Y) \subseteq \mathfrak{P}(X) \cap \mathfrak{P}(Y)$,
6. $\overline{(X \cap Y)} = \overline{X} \cup \overline{Y}$,
7. $\emptyset \times X = \emptyset$,
8. $(X \cup Y) \times Z = (X \times Z) \cup (Y \times Z)$.

2 Fonctions

2.1 Fonctions totales

Definition. Une fonction totale est définie par trois choses :
- son *ensemble de définition* A, appelé également son *ensemble de départ* ou simplement son *domaine*,
- son *ensemble d'arrivée* B, appelé également son *co-domaine*,
- et la donnée pour chaque élément $a \in A$ de exactement une *image* de a, également appelée *valeur* de la fonction en a, dans l'ensemble d'arrivée B.

De façon équivalente, une fonction totale f peut être vue comme un sous-ensemble de $A \times B$ tel que

existence : pour tous $a \in A$, il y a au moins un $b \in B$ tel que $(a, b) \in f$;

unicité : pour tous $a \in A$, il y a au plus un $b \in B$ tel que $(a, b) \in f$.

On dit que f est définie *sur* A et à valeurs dans B et on note $f : A \to B$; la valeur de f en a est notée $f(a)$.
L'attribut "totale" est souvent omis. On la souligne ici pour rendre explicite la différence avec la notion de fonction partielle définie dans la prochaine section. Soyons clairs, chaque fois qu'on dit "fonction" sans spécifier l'attribut "totale" ou "partielle", on entend fonction totale.

Exercice 3. Décrire la fonction `double`:$n \mapsto n + n$ comme un sous-ensemble de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et vérifier les propriétés d'existence et unicité. Réciproquement, quelle correspondance entre naturels décrit l'ensemble $\{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), \ldots\}$?

Injection, surjection, etc. Étant donnée une fonction $f : A \to B$, on dit que
- f est *injective* si pour tous $a, a' \in A$, $f(a) = f(a')$ implique $a = a'$,
- f est *surjective* si pour tous $b \in B$, il existe $a \in A$ tel que $f(a) = b$,
- f est *bijective* ssi f est injective et surjective.

Exercice 4. Pour chacune des fonctions suivantes, dire si elle est injective, surjective et/ou bijective.

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_2 : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto n \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_3 : \mathbb{N} &\to \mathbb{Z} \\ n &\mapsto n \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_4 : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto n+1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_5 : \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ n &\mapsto n+1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_6 : \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ n &\mapsto -n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_7 : \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ n &\mapsto |n| \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_8 : \mathbb{Z} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto |n| \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_9 : \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ n &\mapsto 2n \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_{10} : \mathbb{Q} &\to \mathbb{Q} \\ x &\mapsto 2x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_{11} : \mathbb{Q} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_{12} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{13} : \mathbb{D} &\to \mathbb{D} \\ d &\mapsto \mathtt{nil} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_{14} : \mathbb{D}/\{\mathtt{nil}\} &\to \mathbb{D} \\ (d.d') &\mapsto d \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_{15} : \mathbb{N} &\to \mathbb{D} \\ n &\mapsto (\underbrace{\mathtt{nil}.(\ldots.(\mathtt{nil}.}_{n \text{ fois}}\mathtt{nil})\ldots)) \end{aligned}$$

Composition. Soient $f : A \to B$ et $g : B \to C$; la composée de f et g est la fonction $g \circ f : A \to C$ définie par

$$g \circ f(a) = g(f(a)).$$

Exercice 5. Pour chacune des fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes, donner les valeurs de $f \circ f(x)$, $g \circ g(x)$, $f \circ g(x)$, $g \circ f(x)$:

1. $f(x) = -x$, $g(x) = |x|$,
2. $f(x) = \sqrt{|x|}$, $g(x) = x^2$,
3. $f(x) = x^3$, $g(x) = 2x + 1$.

Étant donnée une fonction $f : A \to B$ et un sous-ensemble $E \subseteq A$, *l'image de E par f* est l'ensemble des images des éléments de E :

$$f(E) = \{f(e)\ ;\ e \in E\}.$$

De même, si $F \subseteq B$, on note $f^{-1}(F)$ l'*image réciproque* de F, c'est à dire le sous-ensemble de A constitué des $a \in A$ dont l'image est dans F :

$$f^{-1}(F) = \{a \in A\ ;\ f(a) \in F\}$$

Exercice 6. Soit $f : A \to B$ une fonction.

1. Montrer que si f est injective alors pour tout sous-ensemble E de A on a $f^{-1}(f(E)) = E$.
2. Montrer la réciproque : si $f^{-1}(f(E)) = E$ pour tout sous-ensemble E de A, alors f est injective.

Exercice 7. Montrer que si les fonctions $f : A \to B$ et $g : B \to C$ sont injectives (resp. surjectives, bijectives) alors $g \circ f$ est injective (resp. surjective, bijective).

Caractéristique. Tous sous-ensemble E d'un ensemble A détermine une unique fonction $\chi_E : A \to \{0,1\}$ appelée *fonction caractéristique* de E dans A et définie par :

$$\chi_E(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in E \\ 0 & \text{si } a \notin E \end{cases}$$

Réciproquement étant donnée une fonction $\chi : A \to \{0,1\}$, celle-ci détermine une unique partie A_χ de A définie par :

$$A_\chi = \{a \in A\ ;\ \chi(a) = 1\}.$$

Par conséquent, il y a une bijection de l'ensemble des fonctions de A dans $\{0,1\}$ vers $\mathfrak{P}(A)$.

Exercice 8.

1. Quelle est la fonction caractéristique de l'ensemble vide ? de l'ensemble A tout entier ?
2. Supposons que $A = \mathbb{N}$. Quelle est la fonction caractéristique de l'ensemble des entiers pairs ? de l'ensemble des carrés parfaits ?
3. Soient F et G deux sous-ensembles de A. Quelles sont, en fonction de χ_F et χ_G, les fonctions caractéristiques de $\overline{F}$? de $F \cup G$?
4. Réciproquement, soient $f, g : A \to \{0,1\}$. Quelles sont, en fonction de A_f et A_g, les parties de A définies par $f \cdot g : a \mapsto f(a) \cdot g(a)$? par $h : a \mapsto \min(f(a) - g(a), 0)$.

2.2 Fonctions partielles

Une *fonction partielle* est définie par trois choses :
– son *ensemble de départ* A,
– son *ensemble d'arrivée* B, ou *co-domaine*,
– et la donnée pour chaque élément $a \in A$ de au plus une *image* de a dans B.
De façon équivalente, une fonction partielle f peut être vue comme un sous-ensemble de $A \times B$ tel que

unicité : pour tous $a \in A$, il y a au plus un $b \in B$ tel que $(a,b) \in f$.

C'est-à-dire, la seule différence entre une fonction totale et une fonction partielle est que cette dernière ne doit pas satisfaire la propriété d'existence. On note $f : A \to B_\perp$ quand f est une fonction partielle de A dans B. Pour tous $a \in A$, on dit que $f(a)$ *converge*, noté $f(a) \downarrow$, s'il existe $b \in B$ tel que $(a,b) \in f$, sinon on dit que $f(a)$ *diverge*, noté $f(a) = \perp$ ou $f(a) \uparrow$.
Le *domaine* d'une fonction $f : A \to B_\perp$ est l'ensemble, noté dom(f), d'éléments $a \in A$ où $f(a)$ converge :

$$\mathrm{dom}(f) = \{a \in A \; ; \; f(a) \downarrow\}$$

Remarquons que la notion de domaine diffère en général de la notion d'ensemble de départ, contrairement au cas des fonctions totales.

Exercice 9. Pour chacune des fonctions suivantes, dire si elle est totale ou partielle, et, dans ce dernier cas, donner son domaine.

$$\begin{array}{rrrrrr} f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_\perp & f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_\perp & f_3 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_\perp & f_5 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+_\perp & f_4 : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+_\perp & f_6 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_\perp \\ n \mapsto n & n \mapsto n & (n,m) \mapsto \frac{n}{m} & x \mapsto \sqrt{x} & x \mapsto \sqrt{x} & x \mapsto \sqrt{x} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr} f_7 : \quad \mathbb{D} \to \mathbb{D}_\perp & f_8 : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{D}_\perp & f_9 : \mathbb{D} \to \mathbb{D}_\perp \\ (d.d') \mapsto d & (d,d') \mapsto (d.d') & d \mapsto (\mathtt{nil}.d) \end{array}$$

Composition. La composition de deux fonctions partielles $f : A \to B_\perp$ et $g : B \to C_\perp$ est la fonction partielle $(g \circ f) : A \to C_\perp$ définie par

$$(g \circ f)(a) = \begin{cases} g(f(a)) & \text{si } f(a) \downarrow \text{ et } g(f(a)) \downarrow, \\ \perp & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 10. Décrire la composition des deux fonctions partielles comme un sous-ensemble de $A \times C$.

Exercice 11 (Resumé)**.** Etant donné une fonction partielle $f : A \to B_\perp$, on definit le sous-ensemble de $B \times A$ suivant :

$$f^{-1} = \{(b,a) \; ; \; (a,b) \in f\}$$

Donner des exemples de f tel que f^{-1} n'est pas une fonction partielle de B vers A. Quelles sont les conditions sur f nécessaires et suffisants pour avoir f^{-1} fonction partielle ? et pour l'avoir fonction totale ?