Calculabilité et décidabilité : pre-partiel

(*Documents autorisés : notes de cours et de TD, photocopies*)

Licence Info 3 - Michele Pagani

14 mars 2013 - Durée : 1h30

Exercice 1. Pour chacune des fonctions suivantes, dire si elle est totale ou partielle, et, dans ce dernier cas, donner son domaine.

$$\begin{array}{ccccc} f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_\perp & f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_\perp & f_3 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}_\perp & f_4 : \mathbb{D} \to \mathbb{D}_\perp & f_5 : \mathbb{D} \to \mathbb{D}_\perp \\ n \mapsto n^2 & n \mapsto 2n+10 & n \mapsto \frac{1}{n} & \underline{n} \mapsto \underline{n+1} & d \mapsto (\mathtt{nil}.d) \end{array}$$

Solution 1. f_1, f_5 *sont totales.*

$$\begin{aligned} \mathtt{dom}(f_2) &= \{x \in \mathbb{Z}\ ;\ x \geq -5\} \\ \mathtt{dom}(f_3) &= \{x \in \mathbb{Z}\ ;\ x \neq 0\} \\ \mathtt{dom}(f_4) &= \{d \in \mathbb{D}\ ;\ d \text{ numeral}\} \end{aligned}$$

Exercice 2. Etant donné le programme `sum` suivant :

```
read X;
  Y := tl X;
  X := hd X;
  while X do
  {
    Y := cons (hd X) Y;
    X := tl X
  };
write Y
```

Montrer que $[\![\mathtt{sum}]\!]((\underline{\mathtt{n}}.\underline{\mathtt{m}})) = \underline{\mathtt{n+m}}$. *(Suggestion : par induction sur n).*

Solution 2 (Sketch)**.** *On écrit*

$$\begin{array}{ll} C1 = \mathtt{Y\ :=\ tl\ X} & D1 = \mathtt{Y\ :=\ cons(hd\ X)Y} \\ C2 = \mathtt{X\ :=\ hd\ X} & D2 = \mathtt{X\ :=\ tl\ X} \\ C3 = \mathtt{while}\, X\, \mathtt{do}\{D1;D2\} & \end{array}$$

Soit σ_0 le store initial du programme `sum` sur l'entrée $(\underline{n}.\underline{m})$. Il faut prouver que $C1;\ C2;\ C3 \vdash \sigma_0 \to \sigma$, pour un quelque store σ tel que $\sigma(Y) = \underline{n{+}m}$.
Par définition on a :

$$\dfrac{\dfrac{\mathcal{E}[\![\mathtt{tl\ X}]\!]\sigma_0 = \underline{n}}{\mathtt{Y\ :=\ tl\ X} \vdash \sigma_0 \to \sigma_1} \qquad \dfrac{\dfrac{\mathcal{E}[\![\mathtt{hd\ X}]\!]\sigma_1 = \underline{m}}{\mathtt{X\ :=\ hd\ X} \vdash \sigma_1 \to \sigma_2} \qquad C3 \vdash \sigma_2 \to ?}{C2;C3 \vdash \sigma_1 \to ?}}{C1;\ C2;\ C3 \vdash \sigma_0 \to ?}$$

Où

	X	Y
σ_0	$(\underline{\mathtt{n}}.\underline{\mathtt{m}})$	nil
σ_1	$(\underline{\mathtt{n}}.\underline{\mathtt{m}})$	$\underline{\mathtt{m}}$
σ_2	$\underline{\mathtt{n}}$	$\underline{\mathtt{m}}$

Il faut donc prouver que :

$$\mathtt{while}\, X\, \mathtt{do}\{\mathtt{Y\ :=\ cons(hd\ X)Y;\ X\ :=\ tl\ X}\} \vdash \sigma_2 \to \sigma \tag{1}$$

pour un store σ tel que $\sigma(Y) = \underline{n{+}m}$. La preuve se fait par induction sur n.
Cas de base : prouver (1) pour $\sigma_2 = \mathtt{X} \mapsto \underline{0}, \mathtt{Y} \mapsto \underline{\mathtt{m}}$ est trivial, en rappelant que $\underline{0} = \mathtt{nil}$. En effet on a :

$$\frac{\mathcal{E}[\![X]\!]\sigma_2 = \underline{0} = nil}{while\, X\, do\{D1;D2\} \vdash \sigma_2 \to \sigma_2}$$

et $\sigma_2(\mathtt{Y}) = \underline{\mathtt{m}} = \underline{\mathtt{m}+\mathtt{n}}$.
Étape d'induction : il faut prouver (1) *en supposant que la propriété est vraie pour* $\sigma_4 = \mathtt{X} \mapsto \underline{\mathtt{n}'}, \mathtt{Y} \mapsto \underline{\mathtt{m}+1}$ *et avec* $n = n' + 1$*. On a (avec* $\sigma_3 = \mathtt{X} \mapsto \underline{\mathtt{n}'+1}, \mathtt{Y} \mapsto \underline{\mathtt{m}+1}$*) :*

$$\cfrac{\mathcal{E}[\![X]\!]\sigma_2 \neq nil \qquad \cfrac{\cfrac{\mathcal{E}[\![\mathtt{cons (hd\ X)Y}]\!]\sigma_2 = \underline{m}\text{+1}}{\mathtt{Y:=cons(hd\ X)Y} \vdash \sigma_2 \to \sigma_3} \qquad \cfrac{\mathcal{E}[\![\mathtt{tl\ X}]\!]\sigma_3 = \underline{\mathtt{n'}}}{\mathtt{X:=tl\ X} \vdash \sigma_3 \to \sigma_4}}{D1;D2 \vdash \sigma_2 \to \sigma_4} \qquad \cfrac{\textit{hypothese d'induction}}{while\, X\, do\{D1;D2\} \vdash \sigma_4 \to \sigma}}{while\, X\, do\{D1;D2\} \vdash \sigma_2 \to \sigma}$$

□

Exercice 3. Prouver que tout ensemble fini est décidable.

Solution 3. *Supposons* A *un ensemble fini, c.à-d.* $A = \{\mathtt{d1}, \ldots, \mathtt{dn}\}$ *pour un quelque entier* $n \geq 0$*. L'ensemble est alors décidé par le programme suivant*

```
read X;
 Y := false ;
 if ?= X d1 then Y := true;
 if ?= X d2 then Y := true;
  .
  .
  .
  if ?= X dn then Y := true;
write Y
```

□

Exercice 4. Prouver que l'ensemble de WHILE-programmes $A = \{\mathtt{P}\ ;\ \forall n, m \in \mathbb{N}, [\![\mathtt{P}]\!]((\underline{\mathtt{n}}.\underline{\mathtt{m}})) = \underline{\mathtt{n}+\mathtt{m}}\}$ est indécidable.

Solution 4. *L'ensemble* A *n'est pas trivial, car il contient par exemple le programme* `sum` *(donc* $A \neq \emptyset$*), et il ne contient pas le programme* `readX;writeX` *(donc* $A \neq \mathtt{Prg}$*). De plus* A *est extensionel, car si* $[\![\mathtt{P}]\!] = [\![\mathtt{Q}]\!]$*, alors soit tous les deux sont dans* A *soit ils sont dehors. On conclue par le Théorème de Rice que* A *est indécidable.* □

Exercice 5. Étant donnés deux WHILE-programmes `P` et `Q`, on dit que `P` *converge au moins comme* `Q` (en symboles $\mathtt{P} \geq \mathtt{Q}$) si, et seulement si, `P` converge sur tous les arbres où `Q` converge, c.à-d. :

$$\mathtt{P} \geq \mathtt{Q} \text{ ssi } \forall \mathtt{d} \in \mathbb{D}, [\![\mathtt{Q}]\!](\mathtt{d}) \downarrow \text{ implique } [\![\mathtt{P}]\!](\mathtt{d}) \downarrow$$

Le but de cet exercice est de prouver que la relation $\geq$ n'est pas décidable, c.à-d. il n'existe aucun programme `M` tel que

$$[\![\mathtt{M}]\!](\underline{\mathtt{P}}.\underline{\mathtt{Q}}) = \begin{cases} \mathtt{true} & \text{si } \mathtt{P} \geq \mathtt{Q}, \\ \mathtt{false} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Où on rappelle que $\underline{\mathtt{P}}$ dénote l'encodage du programme `P` comme arbre binaire de $\mathbb{D}$.
La preuve est obtenue par réduction au problème de l'arrêt. L'exercice est divisé en deux sous-exercices. Chaque sous-exercice peut être résolu indépendamment de l'autre.

Ex. 5.1 Écrire un programme `L` qui prend en entrée une paire $(\underline{\mathtt{P}}.\mathtt{d})$ et donne en sortie l'arbre $\underline{\mathtt{P}^d}$ associé à un programme $\mathtt{P}^d$ tel que, $[\![\mathtt{P}]\!](\mathtt{d}) \downarrow$ ssi $\forall \mathtt{e} \in \mathbb{D}, [\![\mathtt{P}^d]\!](\mathtt{e}) \downarrow$.

Ex. 5.2 En supposant avoir le programme L de la question précédente et en supposant l'existence d'un programme M qui décide la relation $\geq$, écrire un programme H qui décide le problème de l'arrêt. En déduire que $\geq$ n'est pas décidable.

Solution 5. Ex. 5.1 *On peut imaginer* L *être un programme transformant le code de* $\underline{\mathtt{P}} = (\underline{\mathtt{V}i}\ \underline{\mathtt{C}}\ \underline{\mathtt{V}j})$ *dans le code* $\underline{\mathtt{P}^d} = (\underline{\mathtt{V}i}\ (\underline{;}\ (\underline{:=}\ \underline{\mathtt{V}i}\ (\mathtt{quote\ d}))\ \underline{\mathtt{C}})\ \underline{\mathtt{V}j})$. *Le programme* L *est défini comme suit :*

```
read X;
  Xp := hd X;                                    % code programme
  Xd := tl X;                                    % entrée d
  Pin := hd Xp;                                  % variable entrée programme
  Pcom := hd (tl Xp);                            % commande programme
  Pout := hd (tl tl Xp);                         % variable sortie programme
  Pcom := (; (:= Pin (quote d)) Pcom);           % C devient  "Vi:= d ; C"
  Xp := (Pin Pcom Pout);                         % code nouveau programme
write Xp
```

Ex. 5.2 *Supposons que* M *est un programme décidant* $\geq$. *L'idée du programme* H *est de prendre en entrée* $(\underline{\mathtt{P}}.\mathtt{d})$, *transformer* P *dans* $\mathtt{P}^d$ *via le programme* L *et puis comparer* $\mathtt{P}^d$ *avec un programme* Q *qui termine toujours, c.à-d. tester si* $\mathtt{P}^d \geq \mathtt{Q}$ *en utilisant* M. *Le résultât de cette comparaison sera donnée en sortie.*

Le programme H *peut donc être défini comme suit :*

```
read X;
  Xp := L X;
  Xq := (X nil X);          % code de "read X; write X", qui termine toujours
  Y := M Xp Xq;
write Y
```

Démontrons que le programme H *ainsi défini décide le problème de l'arrêt. On a que,* $\mathtt{H}(\underline{\mathtt{P}}.\mathtt{d}) = \mathtt{true}$ *ssi* $\mathtt{P}^d \geq \mathtt{Q}$ *ssi* $\forall e \in \mathbb{D}, [\![\mathtt{P}^d]\!](e)\downarrow$ *ssi* $\mathtt{P}(\mathtt{d})\downarrow$. *Egalement,* $\mathtt{H}(\underline{\mathtt{P}}.\mathtt{d}) = \mathtt{false}$ *ssi* $\mathtt{P}^d \not\geq \mathtt{Q}$ *ssi* $\exists e \in \mathbb{D}, [\![\mathtt{P}^d]\!](e)\uparrow$ *ssi* $\mathtt{P}(\mathtt{d})\uparrow$.

En sachant que le problème de l'arrêt n'est pas décidable, on conclut que le programme M *n'existe pas et donc* $\geq$ *n'est pas décidable.*