Théorie de la démonstration
TD6: logique intuitionniste et déduction naturelle

5 décembre 2016

Exercice 1. Prouver les formules suivantes en déduction naturelle :

1. $A \Rightarrow B \Rightarrow A$;
2. $((A \wedge A) \Rightarrow B) \Rightarrow A \Rightarrow B$;
3. $((A \wedge B) \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B \Rightarrow C)$;
4. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$;
5. $(A \vee B) \Rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$ (rappelez-vous que $\neg A = A \Rightarrow \bot$) ;
6. $((A \wedge B) \vee (A \wedge C)) \Rightarrow (A \wedge (B \vee C))$.

Exercice 2. Montrer que la réciproque de la formule 6 de l'exercice 1, c'est-à-dire la loi de distributivité

$$(A \wedge (B \vee C)) \Rightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$$

n'est pas prouvable en logique intuitionniste. Pour ce faire, placez-vous en **LJ** et utilisez la version suivante de la propriété de la disjonction :
si Γ ne contient pas d'implication, alors $\Gamma \vdash A \vee B$ prouvable en **LJ** *implique que soit $\Gamma \vdash A$ soit $\Gamma \vdash B$ est prouvable en* **LJ**.
Ensuite, concluez en n'employant que des règles réversibles.