Théorie de la démonstration
TD5: élimination des coupures

21 novembre 2016

Exercice 1. Individuer les ancêtres princpaux des formules mises en évidence dans les preuves suivantes :

1.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$\vdash \neg P, P$}
\doubleLine
\UnaryInfC{$\vdash \neg P, P, \neg P, P$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg P \vee P, \neg P, P$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg P \vee P, \neg P \vee P$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg P \vee P$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg P \vee P, \perp$}
\AxiomC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdash A$}
\BinaryInfC{$\vdash \boxed{\neg P \vee P}, \perp \wedge A$}
\end{prooftree}
$$

2.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdash A, A$}
\AxiomC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdash B$}
\BinaryInfC{$\vdash A \wedge B, A$}
\AxiomC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdash B$}
\BinaryInfC{$\vdash A \wedge B, A \wedge B$}
\UnaryInfC{$\vdash A \wedge B$}
\UnaryInfC{$\vdash A \wedge B, A \wedge B$}
\UnaryInfC{$\vdash \boxed{A \wedge B}$}
\end{prooftree}
$$

Exercice 2. Calculer la taille logique des formules suivantes :

1. $P \wedge (\overline{Q} \vee R)$;
2. $\overline{P} \vee (QR)$;
3. $(\neg P \vee (P \vee \perp)) \wedge A$, où $|A| = n$.

Exercice 3. Déterminer si les inégalités suivante sont vraies ou fausses dans l'ordre des multiensembles :

1. $[] < [0,0]$;
2. $[1,1] < [0,1]$;
3. $[1,2] < [0,0,0,0,0,0,2]$;
4. $[0,0,0,0,0,0] < [0,0]$;
5. $[0,0,0,0,0,0] < [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]$;
6. $[(3,4),(0,1)] < [(2,56),(1,1007),(1,2016),(0,1),(7,8)]$.

Exercice 4. Calculer la forme sans coupures de la preuve suivante :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \neg A, A} \quad \dfrac{}{\vdash \neg B, B}}{\vdash \neg A \wedge \neg B, A, B}}{\vdash \neg A \wedge \neg B, A \vee B} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi \\ \vdash \Gamma, \neg A\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\ \sigma \\ \vdash \Delta, \neg B\end{array}}{\vdash \Gamma, \Delta, \neg A \wedge \neg B}}{\vdash \neg A \wedge \neg B, \Gamma, \Delta}\,\mathsf{cut}$$

où l'on suppose que π et σ sont sans coupures.

Exercice 5. Calculer la forme sans coupures de la preuve suivante :

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi \\ \vdash A\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\ \sigma \\ \vdash B\end{array}}{\vdash A \wedge B} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \neg B, B} \quad \dfrac{}{\vdash \neg A, A}}{\vdash \neg A, \neg B, B \wedge A}}{\vdash \neg A \vee \neg B, B \wedge A}}{\vdash B \wedge A}\,\mathsf{cut}$$

où l'on suppose que π et σ sont sans coupures.

Exercice 6. Calculer la forme sans coupures de la preuve suivante :

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi \\ \vdash A\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\ \sigma \\ \vdash B\end{array}}{\vdash A \wedge B} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \neg A, A}}{\vdash \neg A, \neg B, A}}{\vdash \neg A \vee \neg B, A}}{\vdash A}\,\mathsf{cut}$$

où l'on suppose que π et σ sont sans coupures.

Exercice 7. Calculer la forme sans coupures de la preuve suivante :

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi \\ \vdash A\end{array} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \neg A, A} \quad \dfrac{}{\vdash \neg A, A}}{\vdash \neg A, \neg A, A \wedge A}}{\vdash \neg A, A \wedge A}}{\vdash A \wedge A}\,\mathsf{cut}$$

où l'on suppose que π est sans coupures.

Exercice 8. Soient

$$\pi_0 \quad := \quad \dfrac{}{\vdash \neg P, P}$$

$$\pi_{n+1} \quad := \quad \dfrac{\dfrac{}{\vdash \neg P, P} \quad \dfrac{\vdots\, \pi_n}{\vdash \neg P, \overbrace{P \wedge \neg P, \ldots, P \wedge \neg P}^{n}, P}}{\vdash \neg P, P \wedge \neg P, P \wedge \neg P, \ldots, P \wedge \neg P, P}$$

et soit

$$\nu_n \quad := \quad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, \pi_n \\ \vdash \neg P, \Gamma, P\end{array}}{\vdash \Gamma, \neg P \vee P}$$

Quelle est la forme sans coupures de

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, \nu_n \\ \vdash \Gamma, \neg P \vee P\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\, \pi_2 \\ \vdash \neg P, P \wedge \neg P, P \wedge \neg P, P\end{array}}{\vdash \neg P, \Gamma, P \wedge \neg P, P}\,\mathsf{cut}}{\vdash \Gamma, P \wedge \neg P, \neg P \vee P}$$