Théorie de la démonstration
TD2

19 septembre 2016

Exercice 1 (Définissabilité de l'implication et de la négation. Montrer que les définitions

$$A \Rightarrow B := \neg A \vee B$$
$$\neg A := A \Rightarrow \bot$$

sont correctes en vérifiant que les règles de l'implication et de la négation sont dérivables une fois que l'on adopte ces définitions.

Exercice 2. (Règles additives) La formulation *additive* des règles logiques est la suivante :

$$\frac{\Gamma, A_i \vdash \Delta}{\Gamma, A_1 \wedge A_2 \vdash \Delta}\ {\scriptstyle i\in\{1,2\}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A_i}{\Gamma \vdash \Delta, A_1 \vee A_2}\ {\scriptstyle i\in\{1,2\}}$$

$$\frac{}{\Gamma, \bot \vdash \Delta}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \Delta, \top}$$

Pour l'implication, la règle additive droite est identique à celle multiplicative ; la règle gauche devient

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta}$$

Montrer que ces règles sont dérivables dans la formulation multiplicative, et vice versa.

Exercice 3. (Réversibilité) Montrer, dans le calcul des séquents monolatère, que les règles suivantes sont dérivables :

$$\frac{\vdash \Gamma, A \vee B}{\vdash \Gamma, A, B} \qquad \frac{\vdash \Gamma, A_1 \wedge A_2}{\vdash \Gamma, A_i} \qquad \frac{\vdash \Gamma, \bot}{\vdash \Gamma}$$

Montrer aussi la dérivabilité de la règle

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B}{\Gamma, A \vdash \Delta, B}$$

en calcul des séquents bilatère.

Est-il possible de démontrer la dérivabilité de ces règles sans utiliser la règle de la coupure ?

Excerice 4. (Admissibilité des règles structurelles) Démontrer que les règles structurelles sont admissibles dans le calcul suivant :

$$\frac{}{\vdash \Gamma, \neg A, A}$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A, B}{\vdash \Gamma, A \vee B} \qquad \frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \wedge B}$$

$$\frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, \bot} \qquad \frac{}{\vdash \Gamma, \top}$$

Quelle propriété remarquable a-t-il ce calcul ?