

Théorie de la démonstration

Examen partiel

17 octobre 2016

Durée de l'épreuve : 2 heures

Tous les documents sont autorisés. Les calculs des séquents (bilatère et monolatère) sont en annexe.

Exercice 1. Pour chacune de ces formules, donner une preuve en calcul des séquents **bilatère** si elle prouvable, ou fournir un contremodèle sinon.

1. **(2 points)** $((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow A \Rightarrow C$;
2. **(2 points)** $(A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow A \Rightarrow C$;
3. **(2 points)** $A \vee (B \wedge C) \Rightarrow (A \vee B) \wedge C$;
4. **(2 points)** $(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$;
5. **(2 points)** $(P \vee Q) \Rightarrow (((P \wedge Q) \Rightarrow (P \vee R)) \wedge Q)$.

Exercice 2. Donner une preuve en calcul des séquents **monolatère** de chacune de ces formules (en utilisant le codage habituel $A \Rightarrow B := \neg A \vee B$) :

1. **(3 points)** $\forall x.(P(x) \Rightarrow \exists y.P(y))$;
2. **(3 points)** $(\exists x.\forall y.P(x, y)) \Rightarrow (\forall y.\exists x.P(x, y))$;
3. **(5 points)** $\exists x.(P(x) \Rightarrow \forall y.P(y))$.

Calcul des séquents bilatère

Règles de l'identité :

$$\frac{}{A \vdash A} \text{id}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma', A \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'} \text{cut}$$

Règles structurelles :

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} \text{w}^+$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, A} \text{w}^-$$

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} \text{c}^+$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A} \text{c}^-$$

Règles logiques :

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \wedge^+$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma' \vdash \Delta', B}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta', A \wedge B} \wedge^{\wedge}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \vee B \vdash \Delta, \Delta'} \vee^+$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \vee^-$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \Rightarrow B \vdash \Delta, \Delta'} \Rightarrow^+$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B} \Rightarrow^-$$

Calcul des séquents monolatère

Règles de l'identité :

$$\frac{}{\vdash \neg A, A} \text{id}$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Delta, \neg A}{\vdash \Gamma, \Delta} \text{cut}$$

Règles structurelles :

$$\frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, A} \text{w}$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A, A}{\vdash \Gamma, A} \text{c}$$

Règles logiques :

$$\frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Delta, B}{\vdash \Gamma, \Delta, A \wedge B} \wedge$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A, B}{\vdash \Gamma, A \vee B} \vee$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, \forall x.A} \forall \text{ } x \notin \text{fv}(\Gamma)$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A[t/x]}{\vdash \Gamma, \exists x.A} \exists$$