Théorie de la démonstration
Examen final

12 décembre 2016

Durée de l'épreuve : 3 heures.
Tous les documents sont autorisés.
Le barème est indiqué dans chaque exercice.

Exercice 1. Pour chacune des formules suivantes, déterminer si elle est prouvable ou pas, avec la méthode que vous préférez.

1. (**1 point**) $\neg P \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$
2. (**2 points**) $((P \wedge Q) \Rightarrow R) \Rightarrow ((P \Rightarrow R) \vee (Q \Rightarrow R))$
3. (**1 point**) $(P \vee Q) \Rightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q)$
4. (**2 points**) $(\forall x.P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow ((\forall x.P(x)) \wedge (\forall x.Q(x)))$
5. (**2 points**) $((\forall x.P(x)) \wedge (\forall x.Q(x))) \Rightarrow (\forall x.P(x) \wedge Q(x))$
6. (**2 points**) $(\forall x.P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow ((\forall x.P(x)) \vee (\forall x.Q(x))$

Exercice 2. (**5 points**) Pour chacune des formules 1, 2 et 3 de l'exercice 1, déterminer si elle est prouvable ou pas en calcul des séquents intuitionniste (**LJ**) ; dans le cas négatif, expliquer pourquoi, en utilisant la version suivante de la *propriété de la disjonction* :
si $\Gamma \vdash A \vee B$ *est prouvable en* **LJ** *avec* Γ *ne contenant aucune disjonction, alors l'un entre* $\Gamma \vdash A$ *et* $\Gamma \vdash B$ *est également prouvable.*
Suggestion : dans le cas de cet exercice, il sera facile d'arriver à une contradiction en montrant que ni $\Gamma \vdash A$ ni $\Gamma \vdash B$ ne sont démontrables en **LJ** car ils ne sont pas démontrables même en **LK**.

Bonus : (**2 points/preuve**) dans le cas d'une formule prouvable, en donner aussi une preuve en déduction naturelle (**NJ**). Rappelez-vous que, en **NJ**, $\neg A$ est juste une abréviation pour $A \Rightarrow \bot$.

Exercice 3. (**5 points**) Calculer la forme sans coupures de la preuve suivante, en supposant π et σ sans coupures.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi\\ \vdash A\end{array}\quad\begin{array}{c}\vdots\,\sigma\\ \vdash B\end{array}}{\vdash A \wedge B}\,\wedge \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \neg B, B}\,\mathsf{id}\quad \dfrac{}{\vdash \neg B, B}\,\mathsf{id}}{\vdash \neg B, \neg B, B \wedge B}\,\wedge}{\vdash \neg A, \neg B, \neg B, B \wedge B}\,\mathsf{weak}}{\vdash \neg A, \neg B, B \wedge B}\,\mathsf{cntr}}{\vdash \neg A \vee \neg B, B \wedge B}\,\vee}{\vdash B \wedge B}\,\mathsf{cut}$$

LK

Identité et règles structurelles :

$$\frac{}{\vdash \neg A, A}\ \textsf{id} \qquad \frac{\vdash \Gamma, A, A}{\vdash \Gamma, A}\ \textsf{cntr} \qquad \frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, A}\ \textsf{weak}$$

Règles logiques réversibles :

$$\frac{}{\vdash \Gamma, \top}\ \top \qquad \frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \wedge B}\ \wedge \qquad \frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, \bot}\ \bot \qquad \frac{\vdash \Gamma, A, B}{\vdash \Gamma, A \vee B}\ \vee \qquad \frac{\vdash \Gamma, A[z/x]}{\vdash \Gamma, \forall x.A}\ \forall,\ z \notin \mathrm{fv}(\Gamma)$$

Règles logiques irreversibles :

$$\frac{\vdash \Gamma, A[t/x]}{\vdash \Gamma, \exists x.A}\ \exists$$

LJ : Σ contient *au plus* une formule

Identité et règles structurelles :

$$\frac{}{A \vdash A}\ \textsf{id} \qquad \frac{\Gamma, A, A \vdash \Sigma}{\Gamma, A \vdash \Sigma}\ \textsf{cntr}\vdash \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma}{\Gamma, A \vdash \Sigma}\ \textsf{weak}\vdash \qquad \frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash A}\ \vdash\textsf{weak}$$

Règles logiques réversibles :

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top}\ \vdash\top \qquad \frac{}{\Gamma, \bot \vdash \Sigma}\ \bot\vdash \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ \vdash\wedge \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Sigma}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Sigma}\ \wedge\vdash$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Sigma \quad \Gamma, B \vdash \Sigma}{\Gamma, A \vee B \vdash \Sigma}\ \vee\vdash \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\ \vdash\Rightarrow$$

Règles logique irreversibles :

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vdash\vee_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vdash\vee_2 \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma, B \vdash \Sigma}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Sigma}\ \Rightarrow\vdash$$

NJ :

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}\ \textsf{id}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\ \Rightarrow\textsf{I} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\ \Rightarrow\textsf{E}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ \wedge\textsf{I} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\ \wedge\textsf{E}_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}\ \wedge\textsf{E}_2$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee\textsf{I}_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee\textsf{I}_2 \qquad \frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}\ \vee\textsf{E}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top}\ \top\textsf{I} \qquad \frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ \bot\textsf{E}$$

Corrigé

Exercice 1.

1. Si on écrit cette formule pour la prouver en **LK** monolatère, on trouve $P \vee \overline{P} \vee Q$, qui est évidemment prouvable (du bas en haut : on remplace les $\vee$ par des virgules, on affaiblit Q et on se retrouve sur une identité).
2. Ici aussi, si on écrit cette formule pour la prouver en **LK** monolatère, on a

$$((P \wedge Q) \Rightarrow R) \Rightarrow ((P \Rightarrow R) \vee (Q \Rightarrow R)) = (P \wedge Q \wedge \overline{R}) \vee \overline{P} \vee R \vee \overline{Q} \vee R,$$

qui est évidemment prouvable : si on ignore la deuxième occurrence de R (qui peut être ajoutée par affaiblissement), on a une formule de la forme $\neg A \vee A$, qui est une tautologie. Si on veut faire la preuve, cela donne

$$\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{id}
\UnaryInfC{$\vdash \overline{P}, P$}
\AxiomC{}
\RightLabel{id}
\UnaryInfC{$\vdash \overline{Q}, Q$}
\AxiomC{}
\RightLabel{id}
\UnaryInfC{$\vdash \overline{R}, R$}
\RightLabel{weak}
\UnaryInfC{$\vdash \overline{R}, R, R$}
\doubleLine
\RightLabel{$\wedge$}
\TrinaryInfC{$\vdash P \wedge Q \wedge \overline{R}, \overline{P}, R, \overline{Q}, R$}
\doubleLine
\RightLabel{$\vee$}
\UnaryInfC{$\vdash (P \wedge Q \wedge \overline{R}) \vee \overline{P} \vee R \vee \overline{Q} \vee R$}
\end{prooftree}$$

où, pour être bref, on a utilisé la version multiplicative (irreversible) de la règle de la conjonction.

3. Encore une fois, si on écrit cette formule pour la prouver en **LK** monolatère, on trouve une formule de la forme $\neg A \vee A$, à savoir $(\overline{P} \wedge \overline{Q}) \vee (P \vee Q)$.
4. On fait la preuve en **LK** monolatère, en appliquant (du bas en haut) le plus possible de règles réversibles et en n'utilisant des règles irréversible (c'est-à-dire la règle du quantificateur existentiel) que quand on n'a plus le choix :

$$\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{id}
\UnaryInfC{$\vdash \overline{P}z, Pz$}
\RightLabel{weak}
\UnaryInfC{$\vdash \overline{P}z, \overline{Q}z, Pz$}
\RightLabel{$\vee$}
\UnaryInfC{$\vdash \overline{P}z \vee \overline{Q}z, Pz$}
\RightLabel{$\exists$}
\UnaryInfC{$\vdash \exists x.\overline{P}x \vee \overline{Q}x, Pz$}
\RightLabel{$\forall$}
\UnaryInfC{$\vdash \exists x.\overline{P}x \vee \overline{Q}x, \forall x.Px$}
\AxiomC{}
\RightLabel{id}
\UnaryInfC{$\vdash \overline{Q}z, Qz$}
\RightLabel{weak}
\UnaryInfC{$\vdash \overline{P}z, \overline{Q}z, Qz$}
\RightLabel{$\vee$}
\UnaryInfC{$\vdash \overline{P}z \vee \overline{Q}z, Qz$}
\RightLabel{$\exists$}
\UnaryInfC{$\vdash \exists x.\overline{P}x \vee \overline{Q}x, Qz$}
\RightLabel{$\forall$}
\UnaryInfC{$\vdash \exists x.\overline{P}x \vee \overline{Q}x, \forall x.Qx$}
\RightLabel{$\wedge$}
\BinaryInfC{$\vdash \exists x.\overline{P}x \vee \overline{Q}x, (\forall x.Px) \wedge (\forall x.Qx)$}
\RightLabel{$\vee$}
\UnaryInfC{$\vdash (\exists x.\overline{P}x \vee \overline{Q}x) \vee ((\forall x.Px) \wedge (\forall x.Qx))$}
\end{prooftree}$$

5. On fait la preuve en **LK** monolatère, de façon analogue au point précédent :

$$\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{id}
\UnaryInfC{$\vdash \overline{P}z, Pz$}
\RightLabel{$\exists$}
\UnaryInfC{$\vdash \exists x.\overline{P}x, Pz$}
\RightLabel{weak}
\UnaryInfC{$\vdash \exists x.\overline{P}x, \exists x.\overline{Q}x, Pz$}
\AxiomC{}
\RightLabel{id}
\UnaryInfC{$\vdash \overline{Q}z, Qz$}
\RightLabel{$\exists$}
\UnaryInfC{$\vdash \exists x.\overline{Q}x, Qz$}
\RightLabel{weak}
\UnaryInfC{$\vdash \exists x.\overline{P}x, \exists x.\overline{Q}x, Qz$}
\RightLabel{$\wedge$}
\BinaryInfC{$\vdash \exists x.\overline{P}x, \exists x.\overline{Q}x, Pz \wedge Qz$}
\RightLabel{$\forall$}
\UnaryInfC{$\vdash \exists x.\overline{P}x, \exists x.\overline{Q}x, \forall x.Px \wedge Qx$}
\doubleLine
\RightLabel{$\vee$}
\UnaryInfC{$\vdash ((\exists x.\overline{P}x) \vee (\exists x.\overline{Q}x)) \vee (\forall x.Px \wedge Qx)$}
\end{prooftree}$$

6. Intuitivement, cette formule dit que si tout le monde a soit la propriété P, soit la propriété Q, alors soit tout le monde a la propriété P, soit tout le monde a la propriété Q. Ceci est évidemment faux, il suffit de penser aux propriétés P et Q comme « être jeune » et « être vieux » : il est vrai que tout le monde est soit jeune soit vieux, mais ceci n'implique pas que tout le monde est jeune ou que tout le monde est vieux. Un autre exemple : il est vrai que tout entier est soit pair, soit impair, mais ce n'est le cas ni que tout entier est pair, ni que tout entier est impair. Formalisons ce dernier contre-exemple en une structure $\mathcal{S}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{\mathcal{S}} &:= \mathbb{N} \\
\mathcal{S}(P) &:= \{2k \mid k \in \mathbb{N}\} \\
\mathcal{S}(Q) &:= \{2k+1 \mid k \in \mathbb{N}\}
\end{aligned}$$

Si F est la formule de l'exercice, on a bien $\mathcal{S} \not\models F$.
On peut bien sûr donner aussi un contre-modèle $\mathcal{S}' \not\models F$ avec domaine fini :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\mathcal{S}'} &:= \{\text{jeune}, \text{vieux}\} \\ \mathcal{S}'(P) &:= \{\text{jeune}\} \\ \mathcal{S}'(Q) &:= \{\text{vieux}\}\end{aligned}$$

Exercice 2.

1. Cette formule est prouvable en **LJ**. On a deux possibilités : soit on considère que $\neg P = P \Rightarrow \bot$, auquel cas une preuve est

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P \vdash P}\,\mathsf{id} \qquad \dfrac{}{\bot \vdash Q}\,\bot}{P \Rightarrow \bot, P \vdash Q}\,{\Rightarrow\vdash}}{\vdash (P \Rightarrow \bot) \Rightarrow P \Rightarrow Q}\,{\vdash\Rightarrow}$$

soit on considère la négation comme primitive, auquel cas une preuve est

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P \vdash P}\,\mathsf{id}}{\neg P, P \vdash}\,{\neg\vdash}}{\neg P, P \vdash Q}\,{\vdash\mathsf{weak}}}{\vdash \neg P \Rightarrow P \Rightarrow Q}\,{\vdash\Rightarrow}$$

Pour le bonus, on peut aussi en donner une preuve en **NJ**, en posant $\Gamma := P \Rightarrow \bot, P$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash P \Rightarrow \bot}\,\mathsf{id} \qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash P}\,\mathsf{id}}{\Gamma \vdash \bot}\,{\Rightarrow\mathsf{E}}}{\Gamma \vdash Q}\,{\bot\mathsf{E}}}{\vdash (P \Rightarrow \bot) \Rightarrow P \Rightarrow Q}\,{\Rightarrow\mathsf{I}}$$

2. Cette formule n'est pas prouvable en **LJ**. En effet, si elle l'était, par réversibilité de la règle de l'implication à droite, le séquent

$$(P \wedge Q) \Rightarrow R \vdash (P \Rightarrow R) \vee (Q \Rightarrow R)$$

serait aussi prouvable en **LJ**. Montrons par contradiction que ce séquent n'est pas prouvable en **LJ**. Supposons qu'il le soit ; alors, par la version donnée de la propriété de la disjonction (qui s'applique car il n'y a pas de $\vee$ dans $(P \wedge Q) \Rightarrow R$), on aurait la prouvabilité en **LJ** soit de

$$(P \wedge Q) \Rightarrow R \vdash P \Rightarrow R$$

soit de

$$(P \wedge Q) \Rightarrow R \vdash Q \Rightarrow R.$$

Mais aucun de ces deux séquents n'est prouvable en **LJ**, car ces séquents ne sont pas prouvables même en **LK**. En effet, prenons le premier ; encore une fois, par réversibilité de l'implication à droite, sa prouvabilité en **LK** est équivalente à la prouvabilité en **LK** de la formule

$$((P \wedge Q) \Rightarrow R) \Rightarrow P \Rightarrow R;$$

or, cette formule admet un contre-modèle, il suffit de poser

$$\begin{aligned}P &:= 1 \\ Q &:= 0 \\ R &:= 0\end{aligned}$$

Le raisonnement pour le séquent $(P \wedge Q) \Rightarrow R \vdash Q \Rightarrow R$ est analogue : sa prouvabilité en **LK** implique la prouvabilité de $((P \wedge Q) \Rightarrow R) \Rightarrow Q \Rightarrow R$, qui n'est pas une tautologie car elle admet le contre-modèle $P := 0$, $Q := 1$, $R := 0$.

3. Cette formule est prouvable en **LJ**. En voici une preuve en utilisant la négation comme primitive (la stratégie est toujours la même : du bas en haut, on applique des règles réversibles tant que c'est possible, on n'utilise les règles irreversibles que quand on n'a plus le choix) :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{id}
\UnaryInfC{$P \vdash P$}
\RightLabel{$\neg\vdash$}
\UnaryInfC{$P, \neg P \vdash$}
\RightLabel{weak$\vdash$}
\UnaryInfC{$P, \neg P, \neg Q \vdash$}
\AxiomC{}
\RightLabel{id}
\UnaryInfC{$Q \vdash Q$}
\RightLabel{$\neg\vdash$}
\UnaryInfC{$Q, \neg Q \vdash$}
\RightLabel{weak$\vdash$}
\UnaryInfC{$Q, \neg P, \neg Q \vdash$}
\RightLabel{$\vee\vdash$}
\BinaryInfC{$P \vee Q, \neg P, \neg Q \vdash$}
\RightLabel{$\wedge\vdash$}
\UnaryInfC{$P \vee Q, \neg P \wedge \neg Q \vdash$}
\RightLabel{$\vdash\neg$}
\UnaryInfC{$P \vee Q \vdash \neg(\neg P \wedge \neg Q)$}
\RightLabel{$\vdash\Rightarrow$}
\UnaryInfC{$\vdash (P \vee Q) \Rightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q)$}
\end{prooftree}
$$

Pour le bonus, en voici une preuve en **NJ**, en posant $\Gamma := P \vee Q, (P \Rightarrow \bot) \wedge (Q \Rightarrow \bot)$:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{id}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash P \vee Q$}
\AxiomC{}
\RightLabel{id}
\UnaryInfC{$\Gamma, P \vdash (P \Rightarrow \bot) \wedge (Q \Rightarrow \bot)$}
\RightLabel{$\wedge\mathsf{E}_1$}
\UnaryInfC{$\Gamma, P \vdash P \Rightarrow \bot$}
\AxiomC{}
\RightLabel{id}
\UnaryInfC{$\Gamma, P \vdash P$}
\RightLabel{$\Rightarrow\mathsf{E}$}
\BinaryInfC{$\Gamma, P \vdash \bot$}
\AxiomC{}
\RightLabel{id}
\UnaryInfC{$\Gamma, Q \vdash (P \Rightarrow \bot) \wedge (Q \Rightarrow \bot)$}
\RightLabel{$\wedge\mathsf{E}_2$}
\UnaryInfC{$\Gamma, Q \vdash Q \Rightarrow \bot$}
\AxiomC{}
\RightLabel{id}
\UnaryInfC{$\Gamma, Q \vdash Q$}
\RightLabel{$\Rightarrow\mathsf{E}$}
\BinaryInfC{$\Gamma, Q \vdash \bot$}
\RightLabel{$\vee\mathsf{E}$}
\TrinaryInfC{$\Gamma \vdash \bot$}
\doubleLine
\RightLabel{$\Rightarrow\mathsf{I}$}
\UnaryInfC{$\vdash (P \vee Q) \Rightarrow ((P \Rightarrow \bot) \wedge (Q \Rightarrow \bot)) \Rightarrow \bot$}
\end{prooftree}
$$

Exercice 3. Considérons la preuve de l'énoncé :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdots\ \pi$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdash A$}
\AxiomC{$\vdots\ \sigma$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdash B$}
\RightLabel{$\wedge$}
\BinaryInfC{$\vdash A \wedge B$}
\AxiomC{}
\RightLabel{id}
\UnaryInfC{$\vdash \neg B, B$}
\AxiomC{}
\RightLabel{id}
\UnaryInfC{$\vdash \neg B, B$}
\RightLabel{$\wedge$}
\BinaryInfC{$\vdash \neg B, \neg B, B \wedge B$}
\RightLabel{weak}
\UnaryInfC{$\vdash \neg A, \neg B, \neg B, B \wedge B$}
\RightLabel{cntr}
\UnaryInfC{$\vdash \neg A, \neg B, B \wedge B$}
\RightLabel{$\vee$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg A \vee \neg B, B \wedge B$}
\RightLabel{cut}
\BinaryInfC{$\vdash B \wedge B$}
\end{prooftree}
$$

La seule coupure présente est principale, on applique l'étape d'élimination correspondante, en obtenant

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdots\ \sigma$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdash B$}
\AxiomC{$\vdots\ \pi$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdash A$}
\AxiomC{}
\RightLabel{id}
\UnaryInfC{$\vdash \neg B, B$}
\AxiomC{}
\RightLabel{id}
\UnaryInfC{$\vdash \neg B, B$}
\RightLabel{$\wedge$}
\BinaryInfC{$\vdash \neg B, \neg B, B \wedge B$}
\RightLabel{weak}
\UnaryInfC{$\vdash \neg A, \neg B, \neg B, B \wedge B$}
\RightLabel{cntr}
\UnaryInfC{$\vdash \neg A, \neg B, B \wedge B$}
\RightLabel{cut}
\BinaryInfC{$\vdash \neg A, B \wedge B$}
\RightLabel{cut}
\BinaryInfC{$\vdash B \wedge B$}
\end{prooftree}
$$

La coupure maximale est celle entre A et $\neg A$. Elle n'est pas principale. On repère les ancêtres principaux de $\neg A$: il n'y en a aucun ! Donc, on fait tout simplement disparaître la coupure, car il n'y a aucun ancêtre principal où la faire remonter :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdots\ \sigma$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdash B$}
\AxiomC{}
\RightLabel{id}
\UnaryInfC{$\vdash \neg B, B$}
\AxiomC{}
\RightLabel{id}
\UnaryInfC{$\vdash \neg B, B$}
\RightLabel{$\wedge$}
\BinaryInfC{$\vdash \neg B, \neg B, B \wedge B$}
\RightLabel{cntr}
\UnaryInfC{$\vdash \neg B, B \wedge B$}
\RightLabel{cut}
\BinaryInfC{$\vdash B \wedge B$}
\end{prooftree}
$$

On remarque que l'affaiblissement aussi disparait car le contexte de A dans π est vide.

La coupure qui reste n'est pas principale. On repère les ancêtres principaux de $\neg B$. Il y en a 2. On fait donc remonter la coupure à ces ancêtres, en dupliquant σ :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdots\ \sigma$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdash B$}
\AxiomC{}
\RightLabel{id}
\UnaryInfC{$\vdash \neg B, B$}
\RightLabel{cut}
\BinaryInfC{$\vdash B$}
\AxiomC{$\vdots\ \sigma$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdash B$}
\AxiomC{}
\RightLabel{id}
\UnaryInfC{$\vdash \neg B, B$}
\RightLabel{cut}
\BinaryInfC{$\vdash B$}
\RightLabel{$\wedge$}
\BinaryInfC{$\vdash B \wedge B$}
\end{prooftree}
$$

On remarque que la contraction a disparu car il n'y a aucune formule dans le contexte de B dans σ. On a maintenant deux coupures sur une identité ; on peut les éliminer en parallèle, en obtenant la forme sans coupures suivante :

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \sigma \\ \vdash B\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\ \sigma \\ \vdash B\end{array}}{\vdash B \wedge B}\ \wedge$$