Institut Galilée
Année 2017-2018

Logique
Licence 1

Contrôle de Logique

Vendredi 23 Février 2018 12h - 14h Correction

Exercice 1 *(3,5 = 0,5 + 1 + 2 pts) Soit F la formule $(\neg A \Rightarrow \neg C) \vee ((A \wedge B) \Rightarrow C)$.*

1. Donner l'ensemble des sous-formules de F.

2. Calculer (et justifier) la hauteur et la longueur de F.

3. (substitution) Soit $G = \neg A \vee \neg C$, que sont les formules $F[G/B]$, $F[G/A][A/C]$, $F[A/C][G/A]$, $F[G/A, A/C]$?

1. **0,5pt, F peut être omise** $\{F, (\neg A \Rightarrow \neg C), \neg A, A, \neg C, C, ((A \wedge B) \Rightarrow C), (A \wedge B), B, C\}$
2. **0,5pt par bonne réponse** longueur : 11 ; hauteur : 3
3. **0,5pt par bonne réponse** $F[G/B] = (\neg A \Rightarrow \neg C) \vee ((A \wedge (\neg A \vee \neg C)) \Rightarrow C)$
$F[G/A][A/C] = (\neg(\neg A \vee \neg C) \Rightarrow \neg C) \vee (((\neg A \vee \neg C) \wedge B) \Rightarrow C)[A/C] = (\neg(\neg A \vee \neg A) \Rightarrow \neg A) \vee (((\neg A \vee \neg A) \wedge B) \Rightarrow A)$
$F[A/C][G/A] = (\neg A \Rightarrow \neg A) \vee ((A \wedge B) \Rightarrow A)[G/A] = (\neg(\neg A \vee \neg C) \Rightarrow \neg(\neg A \vee \neg C)) \vee (((\neg A \vee \neg C) \wedge B) \Rightarrow (\neg A \vee \neg C))$
$F[G/A, A/C] = (\neg(\neg A \vee \neg C) \Rightarrow \neg A) \vee (((\neg A \vee \neg C) \wedge B) \Rightarrow A)$

Exercice 2 *(3 = 0,5 + 2,5 pts) On considère la formule $F = \neg(A \vee B) \Rightarrow (C \wedge (\neg B \Rightarrow A))$*

1. Donner la table de vérité de F.

2. En déduire une formule sous forme normale disjonctive équivalente à F.

1. **0,25 si erreur de calcul, 0,5 si ok** V ou 1, F ou 0

A	B	C	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg B \Rightarrow A$	$C \wedge (\neg B \Rightarrow A)$	F
0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	1
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	0	1	1	1

2. **1 si formule bonne sans explication, 2,5 si explication correcte** $F = (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C)$

Exercice 3 *(6 pts)*

1. $(A \wedge \neg B) \vee (((C \Rightarrow A) \wedge C) \Rightarrow B)$

2. $((X \vee Y) \wedge \neg Y) \vee (((Z \Rightarrow (X \vee Y)) \wedge Z) \Rightarrow Y)$

3. $(A \Rightarrow ((B \vee \neg C) \wedge \neg(A \Rightarrow F))) \vee ((D \wedge \neg E) \vee (A \vee C))$

Rappel : le séquent associé à une formule F est $\vdash F$.

1pt pour chaque table ou raisonnement, 1pt pour chaque preuve en calcul des séquents

Soit F_i la formule de l'item i,

1. Si C faux alors $((C \Rightarrow A) \wedge C)$ faux donc $(((C \Rightarrow A) \wedge C) \Rightarrow B)$ vrai donc F_1 vrai.
Sinon C vrai, si A faux alors $C \Rightarrow A$ faux donc $((C \Rightarrow A) \wedge C)$ faux donc F_1 vrai.
Sinon C vrai et A vrai alors $((C \Rightarrow A) \wedge C)$ vrai alors soit B vrai alors F vrai soit B faux alors $\neg B$ vrai donc F_1 vrai.
F_1 est une tautologie.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{C \vdash C} \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \vdash A} \quad \dfrac{\dfrac{}{B \vdash B}}{\vdash \neg B, B}}{A \vdash A \wedge \neg B, B}}{C \Rightarrow A, C \vdash A \wedge \neg B, B}}{(C \Rightarrow A) \wedge C \vdash A \wedge \neg B, B}}{\vdash A \wedge \neg B, ((C \Rightarrow A) \wedge C) \Rightarrow B}}{\vdash (A \wedge \neg B) \vee (((C \Rightarrow A) \wedge C) \Rightarrow B)}$$

2. $F_2 = F_1[X \vee Y/A][Z/C][Y/B]$ or F_1 est une tautologie donc F_2 est une tautologie. Même preuve en calcul des séquents que le cas précédent.

3. Soit A est vrai alors la deuxième partie de F_3 est vrai donc F_3 est vrai, soit A est faux alors la première partie de F_3 est vrai donc F_3 est vrai. F_3 est une tautologie.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{A \vdash A}}{A \vdash (B \vee \neg C) \wedge \neg(A \Rightarrow F), (D \wedge \neg E), A, C}}{\vdash A \Rightarrow ((B \vee \neg C) \wedge \neg(A \Rightarrow F)), (D \wedge \neg E), A, C}}{\vdash (A \Rightarrow ((B \vee \neg C) \wedge \neg(A \Rightarrow F))) \vee ((D \wedge \neg E) \vee (A \vee C))}$$

Exercice 4 *(4 = 0,5 + 0,5 + 3 pts) Soit F une formule de la logique propositionnelle, on note $\mathcal{V}(F)$ l'ensemble des occurrences de variables propositionnelles présentes dans F.*

1. *Déterminez $\mathcal{V}(\neg F)$ en fonction de $\mathcal{V}(F)$.*
2. *Déterminez $\mathcal{V}(F \vee G)$ en fonction de $\mathcal{V}(F)$ et de $\mathcal{V}(G)$.*
3. *Pour toute formule F, en se servant entre autres des propriétés précédentes, définir $\mathcal{V}(F)$ par induction structurelle.*

1. **0,5pt** $\mathcal{V}(\neg F) = \mathcal{V}(F)$.
2. **0,5pt** $\mathcal{V}(F \vee G) = \mathcal{V}(F) \uplus \mathcal{V}(G)$.
3. **1pt si début, 3pt si ok** On a aussi $\mathcal{V}(F \Rightarrow G) = \mathcal{V}(F \wedge G) = \mathcal{V}(F) \uplus \mathcal{V}(G)$. Définition par induction structurelle :
   Soit F est une variable propositionnelle alors $\mathcal{V}(F) = \{F\}$.
   Soit $F = F_1 \ \alpha \ F_2$ avec $\alpha \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow\}$ alors $\mathcal{V}(F) = \mathcal{V}(F_1) \uplus \mathcal{V}(F_2)$.
   Soit $F = \neg F_1$ alors $\mathcal{V}(F) = \mathcal{V}(F_1)$.

Exercice 5 *(2,5 pts) Montrer que si les formules associées aux séquents prémisses de la règle suivante sont des tautologies, alors la formule associée au séquent conclusion est une tautologie :*

$$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta} \ (\mathit{coupure})$$

Rappel : la formule associée au séquent $\Gamma \vdash \Delta$ est $(\bigwedge \Gamma) \Rightarrow (\bigvee \Delta)$.

1 pt si début, 2,5pt si ok

Soit δ une distribution de valeurs de vérité. Par hypothèse on a $\overline{\delta}((\bigwedge \Gamma) \Rightarrow (\bigvee \Delta) \vee A) = 1$ et $\overline{\delta}((\bigwedge \Gamma) \wedge A \Rightarrow (\bigvee \Delta)) = 1$.
Si $\overline{\delta}(\bigwedge \Gamma) = 0$ alors $\overline{\delta}((\bigwedge \Gamma) \Rightarrow (\bigvee \Delta)) = 1$.
Sinon la première hypothèse entraîne que $\overline{\delta}((\bigvee \Delta) \vee A) = 1$.
Dans ce cas si $\overline{\delta}(A) = 1$ alors par la deuxième hypothèse $\overline{\delta}(\bigvee \Delta) = 1$.
Sinon $\overline{\delta}(A) = 0$ ce qui induit que $\overline{\delta}(\bigvee \Delta) = 1$.
Dans les 2 cas on a donc $\overline{\delta}((\bigwedge \Gamma) \Rightarrow (\bigvee \Delta)) = 1$.

Exercice 6 *(2,5 = 0,5 + 2 pts) On considère la constante logique 'faux' noté $\perp$ dont la valeur de vérité est toujours Faux.*

1. *Montrez que $\neg A$ et $A \Rightarrow \perp$ ont même table de vérité.*
2. *Montrez par induction structurelle que toute formule construite avec les connecteurs $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow$ est équivalente à une formule construite seulement avec les connecteurs $\vee, \wedge, \Rightarrow$ et la constante logique $\perp$.*

1. **0,5 pt** $A \Rightarrow \perp \equiv \neg A \vee \perp \equiv \neg A$.
2. **1pt si début, 2 si ok** On définit par induction structurelle une formule F° équivalente à F telle que F° ne contienne pas $\neg$:
   Soit F est une variable propositionnelle alors $F^\circ = F$.
   Soit $F = F_1 \ \alpha \ F_2$ avec $\alpha \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow\}$ alors $F^\circ = F_1^\circ \ \alpha \ F_2^\circ$.
   Soit $F = \neg F_1$ alors $F^\circ = F_1^\circ \Rightarrow \perp$.
   Enfin $F \equiv F^\circ$ par induction à partir de la propriété du premier item et des propriétés sur les connecteurs α.