Chute de dimension pour les marches aléatoires sur les arbres aléatoires

Pierre Rousselin

LAGA
Université Paris 13 ; Labex MME-DII

Séminaire CALIN, LIPN, 16 janvier 2018

Historique

Les arbres et leurs bords

Mesure harmonique sur le bord d'un arbre

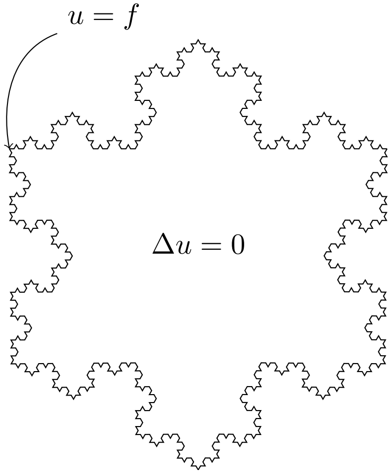
Cas d'un arbre de Galton-Watson

Cas d'un arbre à longueurs récursives

Cas d'une marche aléatoire en milieu aléatoire

Règles de flots

Problème de Dirichlet dans $\mathbb{R}^2$



Données :

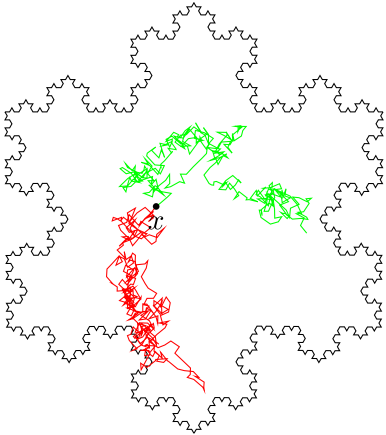
- U ouvert connexe bornée (et ...) de $\mathbb{R}^2$
- son bord : ∂U
- $f : \partial U \to \mathbb{R}$, continue

Question

Existence et unicité de $u : \overline{U} \to \mathbb{R}$ continue et deux fois différentiable sur U telle que

- $\Delta u \coloneqq \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0$ sur U et
- $u = f$ sur ∂U ?

Point de vue probabiliste



Sous certaines conditions sur ∂U, oui et u est donnée par

$$u(x) = \mathbb{E}_x\left[f(B_\tau)\right], \quad \forall x \in \overline{U},$$

où, sous $\mathbb{P}_x$, $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien issu de x et

$$\tau = \inf\left\{t \geq 0 : B_t \in \partial U\right\}.$$

Mesure harmonique sur ∂U

Définition

Si $x \in U$, la *mesure harmonique issue de* x est la loi du point aléatoire B_τ sous $\mathbb{P}_x$. C'est une mesure borélienne de probabilité sur ∂U.

Théorème (Frères Riesz)

Si la courbe ∂U est rectifiable (et ...), alors la mesure harmonique admet une densité par rapport à la mesure de longueur sur ∂U.

Mesure harmonique sur ∂U

Définition

Si $x \in U$, la *mesure harmonique issue de* x est la loi du point aléatoire B_τ sous $\mathbb{P}_x$. C'est une mesure borélienne de probabilité sur ∂U.

Théorème (Frères Riesz)

Si la courbe ∂U est rectifiable (et ...), alors la mesure harmonique admet une densité par rapport à la mesure de longueur sur ∂U.

Le flocon de Koch n'est pas rectifiable...

Chute de dimension

Théorème (N.G. Makarov, 1985)

Il existe (sous certaines conditions...) un borélien C inclus dans ∂U, de dimension 1 tel que la mesure harmonique issue de x est concentrée sur C.

Chute de dimension

Théorème (N.G. Makarov, 1985)

Il existe (sous certaines conditions...) un borélien C inclus dans ∂U, de dimension 1 tel que la mesure harmonique issue de x est concentrée sur C.

Donc presque sûrement, le mouvement brownien issu de x atterrit dans une partie de dimension 1, tandis que la dimension du flocon de Koch est $\frac{\ln(4)}{\ln(3)}$.

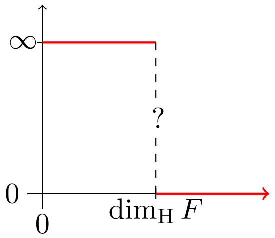
Dimension de Hausdorff

Soit (X, d) un espace métrique et $\delta > 0$. Une famille $(U_i)_{i \geq 1}$ est un δ-recouvrement d'une partie F de X si

- pour tout $i \geq 1$, $\operatorname{diam} U_i \leq \delta$ et
- $F \subset \bigcup_{i \geq 1} U_i$.

La mesure de Hausdorff s-dimensionnelle de F est

$$\mathscr{H}^s F = \lim_{\delta \downarrow 0} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam} U_i)^s : (U_i)_{i \geq 1} \ \delta\text{-recouvrement de } F \right\}.$$



La *dimension de Hausdorff* de F est

- la borne inférieure des réels s tels que $\mathscr{H}^s F = 0$
- la borne supérieure des réels s tels que $\mathscr{H}^s F = \infty$.

Dimension de Hausdorff : exemples

- Ensemble dénombrable : 0 ;
- courbe rectifiable : dimension 1 ;
- surface réglée : dimension 2 ;
- ouvert de $\mathbb{R}^d$: dimension d ;
- ensemble triadique de cantor : dimension $\ln(2)/\ln(3)$;
- flocon de Koch : $\ln(4)/\ln(3)$;
- graphe du mouvement brownien en dimension 1 : $3/2$;
- trajectoire du mouvement brownien en toute dimension $d \geq 2$: 2 ;
- frontière de l'ensemble de Mandelbrot : 2.

Historique

Les arbres et leurs bords

Mesure harmonique sur le bord d'un arbre

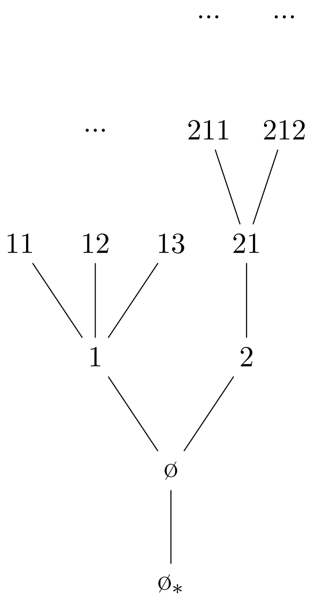
Cas d'un arbre de Galton-Watson

Cas d'un arbre à longueurs récursives

Cas d'une marche aléatoire en milieu aléatoire

Règles de flots

Arbres planaires : notation de Neveu



- Arbre t : partie de l'ensemble des mots finis sur $\mathbb{N}^*$;
- enraciné en $\varnothing$;
- avec un parent artificiel de la racine $\varnothing_*$;
- la hauteur dans l'arbre est égale à la longueur du mot : $|212| = 3$.
- parent : $(212)_* = 21$;
- nombre d'enfants $\nu_t(1) = 3$;
- infini, sans feuille : $\nu_t(x) \geq 1$, pour tout x dans t.

Bord d'un arbre

- Un rayon ξ de l'arbre t est une suite infinie de sommets

$$\xi = (\xi_0 = \emptyset, \xi_1, \xi_2, \ldots)$$

  telle que pour tout naturel i, ξ_{i+1} est un enfant de ξ_i.
- Le bord ∂t de l'arbre t est l'ensemble de ses rayons.
- Autre point de vue : ensemble des mots infinis sur l'alphabet $\mathbb{N}^*$ dont tous les préfixes sont des sommets de t.
- Pour deux rayons distincts ξ et η, le sommet $\xi \wedge \eta$ de t est le plus grand préfixe commun de ξ et η.
- La distance « naturelle » sur le bord ∂t est définie par $d(\xi, \eta) = \exp(-|\xi \wedge \eta|)$.
- L'espace $(\partial t, d)$ est ultramétrique et compact.

Probabilités boréliennes sur le bord d'un arbre

- Pour x dans t, le *cylindre* $[x]_t$ est l'ensemble des rayons qui passent par x.
- Si deux cylindres ne sont pas disjoints, alors l'un est inclus dans l'autre.
- Ils engendrent la tribu borélienne de ∂t.

Probabilités boréliennes sur le bord d'un arbre

- Pour x dans t, le *cylindre* $[x]_t$ est l'ensemble des rayons qui passent par x.
- Si deux cylindres ne sont pas disjoints, alors l'un est inclus dans l'autre.
- Ils engendrent la tribu borélienne de ∂t.

À M, probabilité borélienne sur ∂t, on associe $\theta_M : t \to [0, 1]$ définie par $\theta_M(x) \coloneqq M\left([x]_t\right)$. Alors, $\theta_M(\varnothing) = 1$ et pour tout x dans t,

$$\theta_M(x) = \theta_M(x1) + \theta_M(x2) + \cdots + \theta_M(x\nu_t(x)).$$

Probabilités boréliennes sur le bord d'un arbre

- Pour x dans t, le *cylindre* $[x]_t$ est l'ensemble des rayons qui passent par x.
- Si deux cylindres ne sont pas disjoints, alors l'un est inclus dans l'autre.
- Ils engendrent la tribu borélienne de ∂t.

À M, probabilité borélienne sur ∂t, on associe $\theta_M : t \to [0,1]$ définie par $\theta_M(x) \coloneqq M\left([x]_t\right)$. Alors, $\theta_M(\varnothing) = 1$ et pour tout x dans t,

$$\theta_M(x) = \theta_M(x1) + \theta_M(x2) + \cdots + \theta_M(x\nu_t(x)).$$

Une telle fonction est appelée un *flot* sur l'arbre t.

$$\text{flots sur } t \longleftrightarrow \text{probabilités boréliennes sur } \partial t.$$

Un exemple : la mesure de visibilité

Définition récursive :

- $\mathsf{VIS}_t(\varnothing) = 1$
- pour tout sommet x et tout enfant y de x,
  $\mathsf{VIS}_t(y) = \mathsf{VIS}_t(x)/\nu_t(x)$.

Un exemple : la mesure de visibilité

Définition récursive :

- $\mathsf{VIS}_t(\emptyset) = 1$
- pour tout sommet x et tout enfant y de x,
  $\mathsf{VIS}_t(y) = \mathsf{VIS}_t(x)/\nu_t(x)$.

Point de vue probabiliste :
Loi d'un rayon aléatoire Ξ tel que pour tout $i \geq 0$, sachant le sommet Ξ_i, Ξ_{i+1} est choisi uniformément au hasard parmi les enfants de Ξ_i.

Historique

Les arbres et leurs bords

Mesure harmonique sur le bord d'un arbre

Cas d'un arbre de Galton-Watson

Cas d'un arbre à longueurs récursives

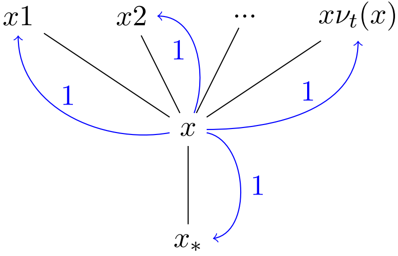
Cas d'une marche aléatoire en milieu aléatoire

Règles de flots

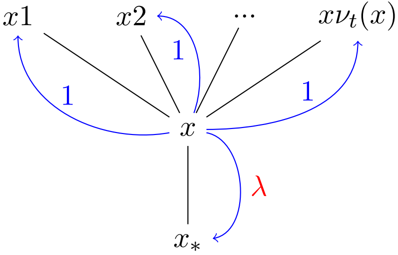
Marches aléatoires sur un arbre

- Noyau de transition $P : t \times t \to [0,1]$:
- pour tout x dans t, $\sum_{y \in t} P(x,y) = 1$.
- Aux plus proches voisins : pour tout x dans t, $P(x,y) > 0$ si et seulement si y est le parent ou un enfant de x.

Marche aléatoire simple



Marche aléatoire λ-biaisée ($\lambda > 0$)



Transience, récurrence

Pour x dans t, on définit une mesure de probabilité P_x^t sur l'ensemble des chemins infinis partant de x dans t : loi de la trajectoire de la marche aléatoire

$$\mathbf{X} = (X_0 = x, X_1, \ldots, X_n, \ldots)$$

où pour tout $n \geq 0$, la loi de X_{n+1} sachant X_n est $P(X_n, \cdot)$.

Transience, récurrence

Pour x dans t, on définit une mesure de probabilité P_x^t sur l'ensemble des chemins infinis partant de x dans t : loi de la trajectoire de la marche aléatoire

$$\mathbf{X} = (X_0 = x, X_1, \ldots, X_n, \ldots)$$

où pour tout $n \geq 0$, la loi de X_{n+1} sachant X_n est $P(X_n, \cdot)$. Pour tous sommets x et y, on peut passer de x à y avec probabilité non nulle : la chaîne de Markov est *irréductible*.

Transience, récurrence

Pour x dans t, on définit une mesure de probabilité P_x^t sur l'ensemble des chemins infinis partant de x dans t : loi de la trajectoire de la marche aléatoire

$$\mathbf{X} = (X_0 = x, X_1, \dots, X_n, \dots)$$

où pour tout $n \geq 0$, la loi de X_{n+1} sachant X_n est $P(X_n, \cdot)$. Pour tous sommets x et y, on peut passer de x à y avec probabilité non nulle : la chaîne de Markov est *irréductible*. Alors, en notant $\tau_y = \inf \{n \geq 1 : X_n = y\}$,

- soit pour tous sommets x et y, $P_x(\tau_y < \infty) = 1$, et la marche aléatoire visite presque sûrement une infinité de fois chaque sommet ;
- soit pour tous sommets x et y, $P_x(\tau_y < \infty) < 1$ et la marche aléatoire visite presque sûrement un nombre fini (qui peut être nul) de fois chaque sommet de t.

Un critère de transience

Définition

Nombre de branchement d'un arbre t : $\mathsf{br}(t) = \exp \dim_{\mathrm{H}} \partial t$.

Exemple

Pour un arbre m-régulier, $\mathsf{br}(t) = m$.

Théorème (Lyons 1990)

La marche aléatoire λ-biaisée est

- *récurrente si $\lambda > \mathsf{br}(t)$,*
- *transiente si $\lambda < \mathsf{br}(t)$.*

Temps de sortie

Supposons la marche transiente.
Soit $\mathbf{X} = (X_0, X_1, \dots)$ une trajectoire de marche aléatoire issue de la racine ø dans t.
L'ensemble des temps de sortie associés à $\mathbf{X}$ est

$$\mathsf{et}(\mathbf{X}) \coloneqq \{s \geq 0 : \forall k > s,\ X_k \neq (X_s)_*\}.$$

On les numérote $\mathsf{et}_0(\mathbf{X}) < \mathsf{et}_1(\mathbf{X}) < \cdots$.

Temps de sortie

Supposons la marche transiente.
Soit $\mathbf{X} = (X_0, X_1, \dots)$ une trajectoire de marche aléatoire issue de la racine $\varnothing$ dans t.
L'ensemble des temps de sortie associés à $\mathbf{X}$ est

$$\mathsf{et}\,(\mathbf{X}) \coloneqq \{s \geq 0 : \forall k > s,\, X_k \neq (X_s)_*\}\,.$$

On les numérote $\mathsf{et}_0\,(\mathbf{X}) < \mathsf{et}_1\,(\mathbf{X}) < \cdots$.
Les points de sortie sont $\mathsf{ep}_0\,(\mathbf{X}) = X_{\mathsf{et}_0(\mathbf{X})} = \varnothing$,
$\mathsf{ep}_1\,(\mathbf{X}) = X_{\mathsf{et}_1(\mathbf{X})}$, ...
Remarque : pour tout $k \geq 0$, $|\mathsf{ep}_k(\mathbf{X})| = k$.

Rayon associé à la marche et mesure harmonique

On note

$$\Xi := \mathrm{ray}\left(\mathbf{X}\right) := \left(\mathsf{ep}_0\left(\mathbf{X}\right), \mathsf{ep}_1\left(\mathbf{X}\right), \ldots\right).$$

Rayon associé à la marche et mesure harmonique

On note

$$\Xi := \mathrm{ray}\left(\mathbf{X}\right) := \left(\mathsf{ep}_0\left(\mathbf{X}\right), \mathsf{ep}_1\left(\mathbf{X}\right), \ldots\right).$$

Ξ est un rayon aléatoire.
Sa loi est appelée la *mesure harmonique* (associée au noyau de transition P) sur ∂t.
On la note $\mathsf{HARM}_{t[,P]}$.

Rayon associé à la marche et mesure harmonique

On note

$$\Xi := \mathrm{ray}\left(\mathbf{X}\right) := \left(\mathsf{ep}_0\left(\mathbf{X}\right), \mathsf{ep}_1\left(\mathbf{X}\right), \ldots\right).$$

Ξ est un rayon aléatoire.
Sa loi est appelée la *mesure harmonique* (associée au noyau de transition P) sur ∂t.
On la note $\mathsf{HARM}_{t[,P]}$.
Pour tout $x \in t$,

$$\begin{aligned} \mathsf{HARM}_{t,P}(x) &= P_{\emptyset}(x \prec \Xi) \\ &= P_{\emptyset}\left(\exists s \geq 0,\ X_s = x \text{ et } \forall k > s,\ X_k \neq x_*\right) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Rayon associé à la marche et mesure harmonique

On note

$$\Xi := \mathrm{ray}\,(\mathbf{X}) := \left(\mathsf{ep}_0\,(\mathbf{X})\,, \mathsf{ep}_1\,(\mathbf{X})\,, \dots\right).$$

Ξ est un rayon aléatoire.
Sa loi est appelée la *mesure harmonique* (associée au noyau de transition P) sur ∂t.
On la note $\mathsf{HARM}_{t[,P]}$.
Pour tout $x \in t$,

$$\begin{aligned}\mathsf{HARM}_{t,P}(x) &= P_\emptyset(x \prec \Xi)\\ &= P_\emptyset\left(\exists s \geq 0,\ X_s = x \text{ et } \forall k > s,\ X_k \neq x_*\right)\\ &> 0.\end{aligned}$$

Donc le support de la mesure harmonique est ∂t tout entier.

Chute de dimension : définition

Il arrive tout de même qu'il existe une « petite » partie C du bord ∂t qui contienne Ξ presque sûrement.

Chute de dimension : définition

Il arrive tout de même qu'il existe une « petite » partie C du bord ∂t qui contienne Ξ presque sûrement.

Définition

Soit μ une mesure de probabilité borélienne sur un espace métrique (X, d). La dimension de Hausdorff de μ est

$$\dim_{\mathrm{H}} \mu \coloneqq \min \left\{ \dim_{\mathrm{H}} C : C \text{ borélien tel que } \mu C = 1 \right\}.$$

Chute de dimension : définition

Il arrive tout de même qu'il existe une « petite » partie C du bord ∂t qui contienne Ξ presque sûrement.

Définition

Soit μ une mesure de probabilité borélienne sur un espace métrique (X, d). La dimension de Hausdorff de μ est

$$\dim_{\mathrm{H}} \mu \coloneqq \min \left\{ \dim_{\mathrm{H}} C : C \text{ borélien tel que } \mu C = 1 \right\}.$$

On dit qu'il y a *chute de dimension* pour μ si $\dim_{\mathrm{H}} \mu < \dim_{\mathrm{H}} X$.

Historique

Les arbres et leurs bords

Mesure harmonique sur le bord d'un arbre

Cas d'un arbre de Galton-Watson

Cas d'un arbre à longueurs récursives

Cas d'une marche aléatoire en milieu aléatoire

Règles de flots

Arbres de Galton-Watson

- Loi de reproduction $\mathbf{p}$ sur $\mathbb{N}$: suite $\mathbf{p} = (p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de réels positifs that $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$.
- d'espérance $m \coloneqq \sum_{k=1}^{\infty} kp_k < \infty$.

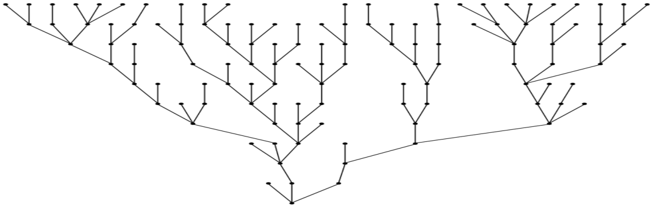


FIGURE – 10 générations d'une simulation d'un arbre de Galton-Watson. La loi de reproduction est uniforme sur $\{0; 1; 2; 3\}$.

Arbres de Galton-Watson

- Loi de reproduction $\mathbf{p}$ sur $\mathbb{N}$: suite $\mathbf{p} = (p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de réels positifs that $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$.
- d'espérance $m \coloneqq \sum_{k=1}^{\infty} k p_k < \infty$.

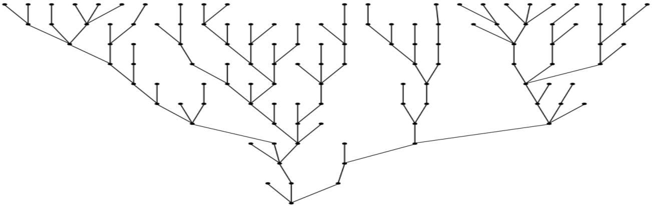


FIGURE – 10 générations d'une simulation d'un arbre de Galton-Watson. La loi de reproduction est uniforme sur $\{0; 1; 2; 3\}$.

À partir de maintenant, on suppose $p_0 = 0$ et $p_1 < 1$.
Cela définit une mesure de probabilité $\mathbf{GW_p}$ sur l'ensemble $\mathcal{T}$ des arbres infinis sans feuille.

Transience

Théorème (Lyons, 1990)

Pout $\mathbf{GW_p}$*-presque tout arbre* t*,* $\mathsf{br}(t) = m$ *et plus précisément :*

- *si* $\lambda < m$ *la marche* λ*-biaisée est transiente sur* t*,*
- *et est récurrente sinon.*

Presque sûrement, $\dim_{\mathrm{H}} \partial T = \ln m$.

Conductance

Définition

La conductance de l'arbre t est

$$\beta(t) := P_{\varnothing}(\tau_{\varnothing_*} = \infty).$$

Conductance

Définition

La conductance de l'arbre t est

$$\beta(t) := P_{\varnothing}(\tau_{\varnothing_*} = \infty).$$

On a $\beta(t) > 0$ si et seulement si la marche aléatoire est transiente. De plus, on a les identités suivantes :

$$\beta(t) = \frac{\sum_{j=1}^{\nu_t(\varnothing)} P(\varnothing, j)\beta(t[j])}{P(\varnothing, \varnothing_*) + \sum_{j=1}^{\nu_t(\varnothing)} P(\varnothing, j)\beta(t[j])}$$

$$\forall 1 \leq i \leq \nu_t(\varnothing), \quad \mathsf{HARM}_t(i) = \frac{P(\varnothing, i)\beta(t[i])}{\sum_{j=1}^{\nu_t(\varnothing)} P(\varnothing, j)\beta(t[j])}$$

Dimension de la mesure harmonique

Théorème (Lyons, Pemantle, Peres, 1995)

Pour la marche aléatoire simple et $\mathbf{GW}$*-presque tout arbre* t*,*

$$\dim_{\mathrm{H}} \mathsf{HARM}_t = C_1^{-1}\mathbb{E}\left[(-\ln)\left(1-\beta(T)\right)\frac{\beta(T)\sum_{i=1}^{\widetilde{\nu}}\beta(\widetilde{T}[i])}{\beta(T)+\sum_{i=1}^{\widetilde{\nu}}\beta(\widetilde{T}[i])}\right]$$

Théorème (Lyons, Pemantle, Peres, 1996)

Il existe une constante $d_\lambda \in (0, \ln m)$*, telle que pour* $\mathbf{GW_p}$*-presque tout* t*,* $\dim_{\mathrm{H}} \mathsf{HARM}_t^\lambda = d_\lambda$*.*

Dimension de la mesure harmonique

Théorème (Lyons, Pemantle, Peres, 1995)

Pour la marche aléatoire simple et $\mathbf{GW}$*-presque tout arbre* t*,*

$$\dim_{\mathrm{H}} \mathsf{HARM}_t = C_1^{-1}\mathbb{E}\left[(-\ln)\left(1-\beta(T)\right)\frac{\beta(T)\sum_{i=1}^{\widetilde{\nu}}\beta(\widetilde{T}[i])}{\beta(T)+\sum_{i=1}^{\widetilde{\nu}}\beta(\widetilde{T}[i])}\right]$$

Théorème (Lyons, Pemantle, Peres, 1996)

Il existe une constante $d_\lambda \in (0, \ln m)$*, telle que pour* $\mathbf{GW_p}$*-presque tout* t*,* $\dim_{\mathrm{H}} \mathsf{HARM}_t^\lambda = d_\lambda$*.*

Dimension de la mesure harmonique

Théorème (Lyons, Pemantle, Peres, 1995)

Pour la marche aléatoire simple et $\mathbf{GW}$*-presque tout arbre* t*,*

$$\dim_{\mathrm{H}} \mathsf{HARM}_t = C_1^{-1}\mathbb{E}\left[(-\ln)\left(1-\beta(T)\right)\frac{\beta(T)\sum_{i=1}^{\widetilde{\nu}}\beta(\widetilde{T}[i])}{\beta(T)+\sum_{i=1}^{\widetilde{\nu}}\beta(\widetilde{T}[i])}\right]$$

Théorème (Lyons, Pemantle, Peres, 1996)

Il existe une constante $d_\lambda \in (0, \ln m)$*, telle que pour* $\mathbf{GW_p}$*-presque tout* t*,* $\dim_{\mathrm{H}} \mathsf{HARM}_t^\lambda = d_\lambda$*.*

Théorème (R. 2017)

$$d_\lambda = \ln(\lambda) + C_\lambda^{-1}\mathbb{E}\left[(-\ln)\left(1-\beta(T)\right)\frac{\lambda\beta(T)\sum_{i=1}^{\widetilde{\nu}}\beta(\widetilde{T}[i])}{\lambda-1+\beta(T)+\sum_{i=1}^{\widetilde{\nu}}\beta(\widetilde{T}[i])}\right]$$

Historique

Les arbres et leurs bords

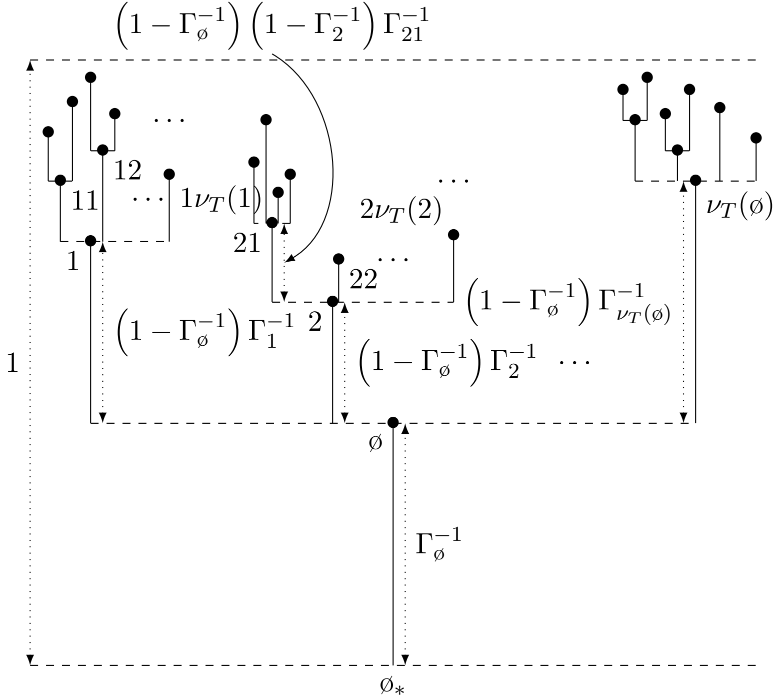
Mesure harmonique sur le bord d'un arbre

Cas d'un arbre de Galton-Watson

Cas d'un arbre à longueurs récursives

Cas d'une marche aléatoire en milieu aléatoire

Règles de flots



$\left(1-\Gamma_{\varnothing}^{-1}\right)\left(1-\Gamma_{2}^{-1}\right)\Gamma_{21}^{-1}$
12
11
$1\nu_T(1)$
$2\nu_T(2)$
21
1
22
$\left(1-\Gamma_{\varnothing}^{-1}\right)\Gamma_{\nu_T(\varnothing)}^{-1}$
$\nu_T(\varnothing)$
$\left(1-\Gamma_{\varnothing}^{-1}\right)\Gamma_{1}^{-1}$
2
$\left(1-\Gamma_{\varnothing}^{-1}\right)\Gamma_{2}^{-1}$
1
$\varnothing$
$\Gamma_{\varnothing}^{-1}$
$\varnothing_*$

Dimension de Hausdorff pour la distance naturelle

- Généralise un modèle utilisé et étudié par Nicolas Curien et Jean-François Le Gall, puis Shen Lin.
- La marche avec probabilités de transitions inversement proportionnelle aux longueurs est presque sûrement transiente.
- Formule explicite (mais qui prend de la place) pour la dimension de Hausdorff de la mesure harmonique.
- Chute de dimension, sauf si la loi de Γ et la loi de reproduction sont toutes les deux dégénérées.

Distance associée aux longueurs

- Γ-hauteur de x dans t :

$$|x|^{\Gamma} := \sum_{y \preceq x} \left(\prod_{z \prec y} \left(1 - \Gamma_z^{-1}\right) \right) \Gamma_y^{-1}.$$

- On a la relation

$$1 - |x|^{\Gamma} = \prod_{y \preceq x} \left(1 - \Gamma_y^{-1}\right).$$

- Pour deux rayons distincts ξ et η :

$$d_{\Gamma}\left(\xi, \eta\right) := 1 - |\xi \wedge \eta|^{\Gamma}.$$

Paramètre de Malthus

- Unique $\alpha > 0$ tel que
$$\mathbb{E}\left[\left(1 - \Gamma_{\varnothing}^{-1}\right)^{\alpha}\right] = 1/m.$$
- Taille de la population à une certaine hauteur :
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{\alpha} Z_{1-\varepsilon}(T) =: W^{\Gamma}(T) \in (0, \infty).$$
- La dimension de ∂T pour la distance d_Γ est en fait presque sûrement égale au paramètre de Malthus.
- Chute de dimension également dans ce cas.

Historique

Les arbres et leurs bords

Mesure harmonique sur le bord d'un arbre

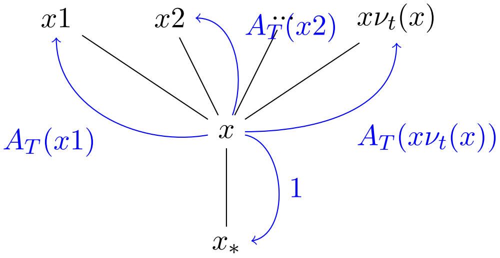
Cas d'un arbre de Galton-Watson

Cas d'un arbre à longueurs récursives

Cas d'une marche aléatoire en milieu aléatoire

Règles de flots

Définition du modèle



- Famille i.i.d. $(A_T(x))_{x\in T}$ de réels strictement positifs.
- Si le minimum, pour α dans $[0,1]$ de $\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\nu_T(\emptyset)} A_T(i)^\alpha\right]$ est plus grand que 1, alors la marche aléatoire est presque sûrement transiente.

Résultats

- Mesure invariante pour l'environnement vu par la particule aux temps de sortie.
- Calcul de la dimension de la mesure harmonique.
- Chute de dimension, sauf si le modèle est complètement déterministe (marche λ-biaisée sur un arbre régulier).

Historique

Les arbres et leurs bords

Mesure harmonique sur le bord d'un arbre

Cas d'un arbre de Galton-Watson

Cas d'un arbre à longueurs récursives

Cas d'une marche aléatoire en milieu aléatoire

Règles de flots

Règle de flot : définition

Une règle de flots Θ est une fonction

$$\Theta : \{\text{arbres}\} \to \{\text{flots sur les arbres}\}$$

telle que :

- pour tout arbre t, Θ_t est un flot sur t ;
- pour tout x dans t, $\Theta_t(x) > 0$ et pour tout mot xy dans t,

$$\Theta_t\,(xy) = \Theta_t(x)\Theta_{t[x]}\,(y)$$

Règle de flot : définition

Une règle de flots Θ est une fonction

$$\Theta : \{\text{arbres}\} \to \{\text{flots sur les arbres}\}$$

telle que :

- pour tout arbre t, Θ_t est un flot sur t ;
- pour tout x dans t, $\Theta_t(x) > 0$ et pour tout mot xy dans t,

$$\Theta_t\left(xy\right) = \Theta_t(x)\Theta_{t[x]}\left(y\right)$$

Interprétation probabiliste :
Si Ξ est un rayon aléatoire sur t, de loi Θ_t et $x \in t$, La loi du rayon Ξ sachant $\{x \prec \Xi\}$ est la loi $\Theta_{t[x]}$.

Règle de flots : exemples

- VIS défini par : pour tout arbre t et tout x dans t :

$$\mathsf{VIS}_t(x) = \prod_{\varnothing \preceq y \prec x} 1/\nu_t(y).$$

- HARM dans tous les modèles de marches transientes déjà rencontrés.
- Soit T un arbre de Galton-Watson. On suppose que $\sum_{k\geq 1} p_k k \ln(k) < \infty$. Par Kesten-Stigum, on a

$$\lim_{n\to\infty} Z_n(T)/m^n =: W(T) \in (0,\infty).$$

On pose alors, pour tout x dans T

$$\mathsf{UNIF}_T(x) := \frac{W(T[x])}{\sum_{|y|=|x|} W(T[y])}.$$

Mesure invariante par rapport à une règle de flot

Soit μ une mesure de probabilité sur l'ensemble des arbres et Θ une règle de flot.
La mesure $\mu \ltimes \Theta$ est la mesure de probabilité définie par

$$\int f(t) \, \mathrm{d} \left(\mu \ltimes \Theta\right)(t) = \int \sum_{i=1}^{\nu_t(\varnothing)} \Theta_t(i) f(t[i]) \, \mathrm{d}\mu(t).$$

Interprétation probabiliste : on commence par choisir un arbre aléatoire T suivant μ, puis, si i est un enfant de la racine, on choisit le sous-arbre $T[i]$ avec probabilité $\Theta_T(i)$.

Définition

Si $\mu \ltimes \Theta = \mu$, on dit que μ est Θ-invariante.

Mesure invariante absolument continue par rapport à **GW**

Théorème (Lyons, Pemantle, Peres, 1995)

S'il existe une probabilité μ *qui est*

- *absolument continue par rapport à* **GW**,
- Θ*-invariante,*

alors la dimension de Hausdorff de Θ_T *est presque sûrement une constante égale à*

$$\dim_{\mathrm{H}} \Theta_T = \int \ln\left(\frac{1}{\Theta_T(\xi_1)}\right) \mathrm{d}\left(\Theta \ltimes \mu_\Theta\right)(\xi, T) \,.$$

De plus, cette dimension est $< \ln m$*, sauf si* Θ_T *est presque sûrement égal à* UNIF_T*.*

Exemples de calculs de dimension

- Pour VIS, la mesure $\mathbf{GW}$ est déjà stationnaire. La formule donne que presque sûrement,

$$\dim_{\mathrm{H}} \mathsf{VIS}_T = \mathbb{E}\left[\ln\left(Z_1\right)\right] \underbrace{<}_{\text{Jensen}} \ln m.$$

- Pour UNIF, la mesure de densité W par rapport à $\mathbf{GW}$ est invariante. Après calcul, on trouve

$$\dim_{\mathrm{H}} \mathsf{UNIF}_T = \ln m.$$

Une machine pour construire des règles de flots

Soit Φ une fonction sur l'ensemble des arbres, à valeurs dans $(0, \infty)$. On définit une règle de flot Θ en posant, pour i dans la première génération

$$\Theta_t(i) = \frac{\Phi(t[i])}{\sum_{j=1}^{\nu_t(\varnothing)} \Phi(t[j])},$$

et en continuant récursivement.

Une machine pour construire des règles de flots

Soit Φ une fonction sur l'ensemble des arbres, à valeurs dans $(0, \infty)$. On définit une règle de flot Θ en posant, pour i dans la première génération

$$\Theta_t(i) = \frac{\Phi(t[i])}{\sum_{j=1}^{\nu_t(\varnothing)} \Phi(t[j])},$$

et en continuant récursivement. On suppose qu'on peut récupérer la valeur de $\Phi(t)$ avec seulement

- la somme $\sum_{j=1}^{\nu_t(\varnothing)} \Phi(t[j])$ et
- une marque $\Gamma_\varnothing$ (aléatoire ou non) sur la racine.

$$\Phi(t) = h\left(\Gamma_\varnothing, \sum_{j=1}^{\nu_t(\varnothing)} \Phi(t[j])\right).$$

Une CNS pour l'existence de mesures invariantes

On suppose que h vérifie, pour tous u, v, w

- $h(u, v) = h(v, u)$;
- $h(u, h(v, w)) = h(h(u, v), w)$;
- $h(u + v, w)/h(u, v + w) = (u + v)w/(u(v + w))$.

Une CNS pour l'existence de mesures invariantes

On suppose que h vérifie, pour tous u, v, w

- $h(u, v) = h(v, u)$;
- $h(u, h(v, w)) = h(h(u, v), w)$;
- $h(u + v, w)/h(u, v + w) = (u + v)w/(u(v + w))$.

On pose, pour $u > 0$,

$$\kappa(u) = \mathbb{E}\left[h\left(u, \sum_{j=1}^{\nu_{\widetilde{T}}(\varnothing)} \Phi(\widetilde{T}[i])\right)\right].$$

Théorème (R. 2017)

Alors, si $\mathbb{E}\left[\kappa(\Phi(T))\right] < \infty$*, la mesure (renormalisée) de densité* $\kappa(\Phi(T))$ *par rapport à* $\mathbf{GW}$ *est* Θ*-invariante.*

Exemples de fonctions h

- $h(u, v) = \alpha uv$, pour $\alpha > 0$;
- $h(u, v) = uv/(u + v - c)$ pour $c > 0$ et $u, v > c$;
- $h(u, v) = uv/(u + v + d)$ pour $d \geq 0$.

Retour sur la marche λ-biaisée

On rappelle les relations :

$$\beta(t) = \frac{\sum_{j=1}^{\nu_t(\varnothing)} \beta(t[j])}{\lambda + \sum_{j=1}^{\nu_t(\varnothing)} \beta(t[j])},$$

$$\mathsf{HARM}_t(i) = \frac{\beta(t[i])}{\sum_{j=1}^{\nu_t(\varnothing)} \beta(t[j])}.$$

On cherche la bonne fonction h.

Retour sur la marche λ-biaisée

On rappelle les relations :

$$\beta(t) = \frac{\sum_{j=1}^{\nu_t(\varnothing)} \beta(t[j])}{\lambda + \sum_{j=1}^{\nu_t(\varnothing)} \beta(t[j])},$$

$$\mathsf{HARM}_t(i) = \frac{\beta(t[i])}{\sum_{j=1}^{\nu_t(\varnothing)} \beta(t[j])}.$$

On cherche la bonne fonction h.

$$h(u,v) \coloneqq \frac{uv}{\lambda - 1 + u + v}.$$

Retour sur la marche λ-biaisée

On rappelle les relations :

$$\beta(t) = \frac{\sum_{j=1}^{\nu_t(\varnothing)} \beta(t[j])}{\lambda + \sum_{j=1}^{\nu_t(\varnothing)} \beta(t[j])},$$

$$\mathsf{HARM}_t(i) = \frac{\beta(t[i])}{\sum_{j=1}^{\nu_t(\varnothing)} \beta(t[j])}.$$

On cherche la bonne fonction h.

$$h(u,v) \coloneqq \frac{uv}{\lambda - 1 + u + v}.$$

Permet de trouver la bonne densité pour avoir une mesure HARM-invariante.

Merci pour votre attention !