Associateurs et quasi-bigèbres d'après V. Drinfel'd

Laurent Poinsot

Institut Galilée

CIP,
14 décembre 2010

Bi-, tri-foncteurs

Bi-, tri-foncteurs

Quitte à remplacer une catégorie par son opposée, les foncteurs sont considérés comme covariants.

Bi-, tri-foncteurs

Quitte à remplacer une catégorie par son opposée, les foncteurs sont considérés comme covariants.

Soit $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$ deux catégories.

Bi-, tri-foncteurs

Quitte à remplacer une catégorie par son opposée, les foncteurs sont considérés comme covariants.

Soit $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$ deux catégories. Le produit direct de $\mathfrak{C}_1$ et $\mathfrak{C}_2$, noté $\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2$,

Bi-, tri-foncteurs

Quitte à remplacer une catégorie par son opposée, les foncteurs sont considérés comme covariants.

Soit $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$ deux catégories. Le produit direct de $\mathfrak{C}_1$ et $\mathfrak{C}_2$, noté $\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2$, est la catégorie dont un objet générique est un couple (x_1, x_2) d'objets x_i de $\mathfrak{C}_i$, $i = 1, 2$;

Bi-, tri-foncteurs

Quitte à remplacer une catégorie par son opposée, les foncteurs sont considérés comme covariants.

Soit $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$ deux catégories. Le produit direct de $\mathfrak{C}_1$ et $\mathfrak{C}_2$, noté $\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2$, est la catégorie dont un objet générique est un couple (x_1, x_2) d'objets x_i de $\mathfrak{C}_i$, $i = 1, 2$; une flèche de $\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2$ est une paire (f_1, f_2) de flèches $f_i \colon x_i \longrightarrow x_i'$, $i = 1, 2$, que l'on compose coordonnée par coordonnée.

Bi-, tri-foncteurs

Quitte à remplacer une catégorie par son opposée, les foncteurs sont considérés comme covariants.

Soit $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$ deux catégories. Le produit direct de $\mathfrak{C}_1$ et $\mathfrak{C}_2$, noté $\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2$, est la catégorie dont un objet générique est un couple (x_1, x_2) d'objets x_i de $\mathfrak{C}_i$, $i = 1, 2$; une flèche de $\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2$ est une paire (f_1, f_2) de flèches $f_i \colon x_i \to x_i'$, $i = 1, 2$, que l'on compose coordonnée par coordonnée. Il s'agit du produit catégorique dans la catégorie de toutes les petites catégories.

Bi-, tri-foncteurs

Quitte à remplacer une catégorie par son opposée, les foncteurs sont considérés comme covariants.
Soit $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$ deux catégories. Le produit direct de $\mathfrak{C}_1$ et $\mathfrak{C}_2$, noté $\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2$, est la catégorie dont un objet générique est un couple (x_1, x_2) d'objets x_i de $\mathfrak{C}_i$, $i = 1, 2$; une flèche de $\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2$ est une paire (f_1, f_2) de flèches $f_i \colon x_i \to x'_i$, $i = 1, 2$, que l'on compose coordonnée par coordonnée. Il s'agit du produit catégorique dans la catégorie de toutes les petites catégories. On appelle bifoncteur (resp. trifoncteur) tout foncteur $F \colon \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2 \to \mathfrak{D}$ (resp. $F \colon \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2 \times \mathfrak{C}_3 \to \mathfrak{D}$).

Bi-, tri-foncteurs

Quitte à remplacer une catégorie par son opposée, les foncteurs sont considérés comme covariants.

Soit $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$ deux catégories. Le produit direct de $\mathfrak{C}_1$ et $\mathfrak{C}_2$, noté $\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2$, est la catégorie dont un objet générique est un couple (x_1, x_2) d'objets x_i de $\mathfrak{C}_i$, $i = 1, 2$; une flèche de $\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2$ est une paire (f_1, f_2) de flèches $f_i \colon x_i \to x_i'$, $i = 1, 2$, que l'on compose coordonnée par coordonnée. Il s'agit du produit catégorique dans la catégorie de toutes les petites catégories. On appelle bifoncteur (resp. trifoncteur) tout foncteur $F \colon \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2 \to \mathfrak{D}$ (resp. $F \colon \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2 \times \mathfrak{C}_3 \to \mathfrak{D}$). Un bi- (resp tri-) foncteur est un foncteur (resp. bifoncteur) lorsque l'on fixe l'un quelconque de ses arguments.

Transformation naturelle

Soient $F, G \colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ deux foncteurs.

Transformation naturelle

Soient $F, G\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ deux foncteurs. Une transformation naturelle entre F et G est la donnée une application τ qui associe à chaque objet c de $\mathfrak{C}$ une flèche $\tau_c\colon Fc \to Gc$ (de la catégorie $\mathfrak{D}$)

Transformation naturelle

Soient $F, G\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ deux foncteurs. Une transformation naturelle entre F et G est la donnée une application τ qui associe à chaque objet c de $\mathfrak{C}$ une flèche $\tau_c\colon Fc \to Gc$ (de la catégorie $\mathfrak{D}$) de telle sorte que quelle que soit la flèche $f\colon c \to c'$ de la catégorie $\mathfrak{C}$,

Transformation naturelle

Soient $F, G \colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ deux foncteurs. Une transformation naturelle entre F et G est la donnée une application τ qui associe à chaque objet c de $\mathfrak{C}$ une flèche $\tau_c \colon Fc \to Gc$ (de la catégorie $\mathfrak{D}$) de telle sorte que quelle que soit la flèche $f \colon c \to c'$ de la catégorie $\mathfrak{C}$, le diagramme suivant soit commutatif

Transformation naturelle

Soient $F, G\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ deux foncteurs. Une transformation naturelle entre F et G est la donnée une application τ qui associe à chaque objet c de $\mathfrak{C}$ une flèche $\tau_c\colon Fc \to Gc$ (de la catégorie $\mathfrak{D}$) de telle sorte que quelle que soit la flèche $f\colon c \to c'$ de la catégorie $\mathfrak{C}$, le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd} c \arrow[d, "f"'] & Fc \arrow[r, "\tau_c"] \arrow[d, "Ff"'] & Gc \arrow[d, "Gf"] \\ c' & Fc' \arrow[r, "\tau_{c'}"'] & Gc' \end{tikzcd}$$

Transformation naturelle

Soient $F, G\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ deux foncteurs. Une transformation naturelle entre F et G est la donnée une application τ qui associe à chaque objet c de $\mathfrak{C}$ une flèche $\tau_c\colon Fc \to Gc$ (de la catégorie $\mathfrak{D}$) de telle sorte que quelle que soit la flèche $f\colon c \to c'$ de la catégorie $\mathfrak{C}$, le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd} c \arrow[d, "f"'] \\ c' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Fc \arrow[r, "\tau_c"] \arrow[d, "Ff"'] & Gc \arrow[d, "Gf"] \\ Fc' \arrow[r, "\tau_{c'}"'] & Gc' \end{tikzcd}$$

On dit que $\tau_c\colon Fc \to Gc$ est naturelle en c,

Transformation naturelle

Soient $F, G \colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ deux foncteurs. Une transformation naturelle entre F et G est la donnée une application τ qui associe à chaque objet c de $\mathfrak{C}$ une flèche $\tau_c \colon Fc \to Gc$ (de la catégorie $\mathfrak{D}$) de telle sorte que quelle que soit la flèche $f \colon c \to c'$ de la catégorie $\mathfrak{C}$, le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd} c \arrow[d, "f"'] & Fc \arrow[r, "\tau_c"] \arrow[d, "Ff"'] & Gc \arrow[d, "Gf"] \\ c' & Fc' \arrow[r, "\tau_{c'}"'] & Gc' \end{tikzcd}$$

On dit que $\tau_c \colon Fc \to Gc$ est naturelle en c, et on note $\tau \colon F \to G$.

Transformation naturelle

Soient $F, G\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ deux foncteurs. Une transformation naturelle entre F et G est la donnée une application τ qui associe à chaque objet c de $\mathfrak{C}$ une flèche $\tau_c\colon Fc \to Gc$ (de la catégorie $\mathfrak{D}$) de telle sorte que quelle que soit la flèche $f\colon c \to c'$ de la catégorie $\mathfrak{C}$, le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd} c \arrow[d, "f"'] \\ c' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Fc \arrow[r, "\tau_c"] \arrow[d, "Ff"'] & Gc \arrow[d, "Gf"] \\ Fc' \arrow[r, "\tau_{c'}"'] & Gc' \end{tikzcd}$$

On dit que $\tau_c\colon Fc \to Gc$ est naturelle en c, et on note $\tau\colon F \to G$. Un isomorphisme naturel est une transformation naturelle τ pour laquelle τ_c est un isomorphisme quel que soit l'objet c.

Exemple

Le déterminant est une transformation naturelle.

Exemple

Le déterminant est une transformation naturelle. Soit $\det_R M$ le déterminant d'une matrice M de taille $n \times n$ à coefficients dans un anneau commutatif avec une unité R,

Exemple

Le déterminant est une transformation naturelle. Soit $\det_R M$ le déterminant d'une matrice M de taille $n \times n$ à coefficients dans un anneau commutatif avec une unité R, dont le groupe des unités est noté $\mathcal{U}(R)$.

Exemple

Le déterminant est une transformation naturelle. Soit $\det_R M$ le déterminant d'une matrice M de taille $n \times n$ à coefficients dans un anneau commutatif avec une unité R, dont le groupe des unités est noté $\mathcal{U}(R)$. La matrice M est inversible lorsque son déterminant est dans $\mathcal{U}(R)$.

Exemple

Le déterminant est une transformation naturelle. Soit $\det_R M$ le déterminant d'une matrice M de taille $n \times n$ à coefficients dans un anneau commutatif avec une unité R, dont le groupe des unités est noté $\mathcal{U}(R)$. La matrice M est inversible lorsque son déterminant est dans $\mathcal{U}(R)$. Le déterminant est un homomorphisme de groupes de $\mathrm{GL}_n(R)$ dans $\mathcal{U}(R)$ (c'est-à-dire une flèche dans la catégorie des groupes).

Exemple

Le déterminant est une transformation naturelle. Soit $\det_R M$ le déterminant d'une matrice M de taille $n \times n$ à coefficients dans un anneau commutatif avec une unité R, dont le groupe des unités est noté $\mathcal{U}(R)$. La matrice M est inversible lorsque son déterminant est dans $\mathcal{U}(R)$. Le déterminant est un homomorphisme de groupes de $\mathrm{GL}_n(R)$ dans $\mathcal{U}(R)$ (c'est-à-dire une flèche dans la catégorie des groupes). Puisque le déterminant est défini de la même façon pour tous les anneaux R,

Exemple

Le déterminant est une transformation naturelle. Soit $\det_R M$ le déterminant d'une matrice M de taille $n \times n$ à coefficients dans un anneau commutatif avec une unité R, dont le groupe des unités est noté $\mathcal{U}(R)$. La matrice M est inversible lorsque son déterminant est dans $\mathcal{U}(R)$. Le déterminant est un homomorphisme de groupes de $\mathrm{GL}_n(R)$ dans $\mathcal{U}(R)$ (c'est-à-dire une flèche dans la catégorie des groupes). Puisque le déterminant est défini de la même façon pour tous les anneaux R, chaque homomorphisme d'anneaux (commutatifs avec unité) $f\colon R \to R'$ permet au diagramme suivant de commuter

Exemple

Le déterminant est une transformation naturelle. Soit $\det_R M$ le déterminant d'une matrice M de taille $n \times n$ à coefficients dans un anneau commutatif avec une unité R, dont le groupe des unités est noté $\mathcal{U}(R)$. La matrice M est inversible lorsque son déterminant est dans $\mathcal{U}(R)$. Le déterminant est un homomorphisme de groupes de $\mathrm{GL}_n(R)$ dans $\mathcal{U}(R)$ (c'est-à-dire une flèche dans la catégorie des groupes). Puisque le déterminant est défini de la même façon pour tous les anneaux R, chaque homomorphisme d'anneaux (commutatifs avec unité) $f\colon R \to R'$ permet au diagramme suivant de commuter

$$\begin{tikzcd} \mathrm{GL}_n(R) \arrow[r, "\det_R"] \arrow[d, "\mathrm{GL}_n(f)"'] & \mathcal{U}(R) \arrow[d, "\mathcal{U}(f)"] \\ \mathrm{GL}_n(R') \arrow[r, "\det_{R'}"'] & \mathcal{U}(R') \end{tikzcd}$$

Exemple

Le déterminant est une transformation naturelle. Soit $\det_R M$ le déterminant d'une matrice M de taille $n \times n$ à coefficients dans un anneau commutatif avec une unité R, dont le groupe des unités est noté $\mathcal{U}(R)$. La matrice M est inversible lorsque son déterminant est dans $\mathcal{U}(R)$. Le déterminant est un homomorphisme de groupes de $\mathrm{GL}_n(R)$ dans $\mathcal{U}(R)$ (c'est-à-dire une flèche dans la catégorie des groupes). Puisque le déterminant est défini de la même façon pour tous les anneaux R, chaque homomorphisme d'anneaux (commutatifs avec unité) $f\colon R \to R'$ permet au diagramme suivant de commuter

$$\begin{tikzcd} \mathrm{GL}_n(R) \arrow[r, "\det_R"] \arrow[d, "\mathrm{GL}_n(f)"'] & \mathcal{U}(R) \arrow[d, "\mathcal{U}(f)"] \\ \mathrm{GL}_n(R') \arrow[r, "\det_{R'}"'] & \mathcal{U}(R') \end{tikzcd}$$

Cela signifie que $\det\colon \mathrm{GL}_n \to \mathcal{U}$ est une transformation naturelle entre deux foncteurs de la catégorie des anneaux commutatifs avec unité dans celle des groupes.

Transformation naturelle entre bi-,trifoncteurs (1)

Soient $F, F' \colon \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ deux bifoncteurs.

Transformation naturelle entre bi-,trifoncteurs (1)

Soient $F, F' \colon \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ deux bifoncteurs. Soit α une transformation naturelle de $F \to F'$.

Transformation naturelle entre bi-,trifoncteurs (1)

Soient $F, F' \colon \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ deux bifoncteurs. Soit α une transformation naturelle de $F \to F'$. En termes de diagrammes cela signifie que quelles que soient les flèches $f \colon a \to a'$ de $\mathfrak{A}$ et $g \colon b \to b'$ de $\mathfrak{B}$, le diagramme suivant commute

Transformation naturelle entre bi-,trifoncteurs (1)

Soient $F, F' \colon \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ deux bifoncteurs. Soit α une transformation naturelle de $F \to F'$. En termes de diagrammes cela signifie que quelles que soient les flèches $f \colon a \to a'$ de $\mathfrak{A}$ et $g \colon b \to b'$ de $\mathfrak{B}$, le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} F(a,b) \arrow[r, "\alpha(a,b)"] \arrow[d, "F(f,g)"'] & F'(a,b) \arrow[d, "F'(f,g)"] \\ F(a',b') \arrow[r, "\alpha(a',b')"'] & F'(a',b') \end{tikzcd}$$

Transformation naturelle entre bi-,trifoncteurs (1)

Soient $F, F' \colon \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ deux bifoncteurs. Soit α une transformation naturelle de $F \to F'$. En termes de diagrammes cela signifie que quelles que soient les flèches $f\colon a \to a'$ de $\mathfrak{A}$ et $g\colon b \to b'$ de $\mathfrak{B}$, le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} F(a,b) \arrow[r, "\alpha(a,b)"] \arrow[d, "F(f,g)"'] & F'(a,b) \arrow[d, "F'(f,g)"] \\ F(a',b') \arrow[r, "\alpha(a',b')"'] & F'(a',b') \end{tikzcd}$$

Il est possible de montrer que pour qu'une transformation entre deux bifoncteurs soit naturelle il faut, et il suffit qu'elle le soit entre les foncteurs obtenus en fixant l'une ou l'autre (mais la même pour les deux) des variables.

Transformation naturelle entre bi-,trifoncteurs (2)

Soient $F, F' : \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ deux bifoncteurs.

Transformation naturelle entre bi-,trifoncteurs (2)

Soient $F, F' \colon \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ deux bifoncteurs. Soit α une application qui associe à chaque paire d'objets (a, b) de $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$

Transformation naturelle entre bi-,trifoncteurs (2)

Soient $F, F' \colon \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ deux bifoncteurs. Soit α une application qui associe à chaque paire d'objets (a, b) de $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ une flèche $\alpha(a, b) \colon F(a, b) \to F'(a, b)$ de la catégorie $\mathfrak{C}$.

Transformation naturelle entre bi-,trifoncteurs (2)

Soient $F, F' \colon \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ deux bifoncteurs. Soit α une application qui associe à chaque paire d'objets (a, b) de $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ une flèche $\alpha(a, b) \colon F(a, b) \to F'(a, b)$ de la catégorie $\mathfrak{C}$. Cette application est dite naturelle en a si pour chaque objet b de $\mathfrak{B}$ l'application $\alpha(\cdot, b) \colon F(\cdot, b) \to F'(\cdot, b)$ est une transformation naturelle de foncteurs de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{C}$.

Transformation naturelle entre bi-,trifoncteurs (2)

Soient $F, F' : \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ deux bifoncteurs. Soit α une application qui associe à chaque paire d'objets (a, b) de $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ une flèche $\alpha(a, b) \colon F(a, b) \to F'(a, b)$ de la catégorie $\mathfrak{C}$. Cette application est dite naturelle en a si pour chaque objet b de $\mathfrak{B}$ l'application $\alpha(\cdot, b) \colon F(\cdot, b) \to F'(\cdot, b)$ est une transformation naturelle de foncteurs de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{C}$. Cela revient à dire que le diagramme suivant est commutatif pour chaque flèche $f : a \to a'$ de $\mathfrak{A}$

Transformation naturelle entre bi-,trifoncteurs (2)

Soient $F, F' : \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ deux bifoncteurs. Soit α une application qui associe à chaque paire d'objets (a, b) de $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ une flèche $\alpha(a, b) \colon F(a, b) \to F'(a, b)$ de la catégorie $\mathfrak{C}$. Cette application est dite naturelle en a si pour chaque objet b de $\mathfrak{B}$ l'application $\alpha(\cdot, b) \colon F(\cdot, b) \to F'(\cdot, b)$ est une transformation naturelle de foncteurs de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{C}$. Cela revient à dire que le diagramme suivant est commutatif pour chaque flèche $f : a \to a'$ de $\mathfrak{A}$

$$\begin{tikzcd} F(a,b) \arrow[r, "\alpha(a,b)"] \arrow[d, "F(f{,}\mathrm{id}_b)"'] & F'(a,b) \arrow[d, "F'(f{,}\mathrm{id}_b)"] \\ F(a',b) \arrow[r, "\alpha(a'{,}b)"'] & F'(a',b) \end{tikzcd}$$

Transformation naturelle entre bi-,trifoncteurs (2)

Soient $F, F' \colon \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ deux bifoncteurs. Soit α une application qui associe à chaque paire d'objets (a, b) de $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ une flèche $\alpha(a, b) \colon F(a, b) \to F'(a, b)$ de la catégorie $\mathfrak{C}$. Cette application est dite naturelle en a si pour chaque objet b de $\mathfrak{B}$ l'application $\alpha(\cdot, b) \colon F(\cdot, b) \to F'(\cdot, b)$ est une transformation naturelle de foncteurs de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{C}$. Cela revient à dire que le diagramme suivant est commutatif pour chaque flèche $f \colon a \to a'$ de $\mathfrak{A}$

$$\begin{tikzcd} F(a,b) \arrow[r, "\alpha(a,b)"] \arrow[d, "F(f{,}\mathrm{id}_b)"'] & F'(a,b) \arrow[d, "F'(f{,}\mathrm{id}_b)"] \\ F(a',b) \arrow[r, "\alpha(a'{,}b)"'] & F'(a',b) \end{tikzcd}$$

Remarque : Ceci se transfère facilement au cas des transformations naturelles entre trifoncteurs.

Catégories monoïdales

Une catégorie monoïdale est la donnée d'une catégorie $\mathfrak{C}$,

Catégories monoïdales

Une catégorie monoïdale est la donnée d'une catégorie $\mathfrak{C}$, d'un bifoncteur – appelé tenseur – $\otimes \colon \mathfrak{C} \times \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$,

Catégories monoïdales

Une catégorie monoïdale est la donnée d'une catégorie $\mathfrak{C}$, d'un bifoncteur – appelé tenseur – $\otimes \colon \mathfrak{C} \times \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$, d'un objet e de $\mathfrak{C}$,

Catégories monoïdales

Une catégorie monoïdale est la donnée d'une catégorie $\mathfrak{C}$, d'un bifoncteur – appelé tenseur – $\otimes\colon \mathfrak{C} \times \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$, d'un objet *e* de $\mathfrak{C}$, et trois isomorphismes naturels $\alpha\colon \cdot \otimes (\cdot \otimes \cdot) \to (\cdot \otimes \cdot) \otimes \cdot$,

Catégories monoïdales

Une catégorie monoïdale est la donnée d'une catégorie $\mathfrak{C}$, d'un bifoncteur – appelé tenseur – $\otimes\colon \mathfrak{C}\times\mathfrak{C}\to\mathfrak{C}$, d'un objet e de $\mathfrak{C}$, et trois isomorphismes naturels $\alpha\colon \cdot\otimes(\cdot\otimes\cdot)\to(\cdot\otimes\cdot)\otimes\cdot$, $\lambda\colon e\otimes\cdot\to \mathrm{Id}$,

Catégories monoïdales

Une catégorie monoïdale est la donnée d'une catégorie $\mathfrak{C}$, d'un bifoncteur – appelé tenseur – $\otimes\colon \mathfrak{C}\times\mathfrak{C}\to\mathfrak{C}$, d'un objet e de $\mathfrak{C}$, et trois isomorphismes naturels $\alpha\colon \cdot\otimes(\cdot\otimes\cdot)\to(\cdot\otimes\cdot)\otimes\cdot$, $\lambda\colon e\otimes\cdot\to \mathrm{Id}$, et $\rho\colon \cdot\otimes e\to\mathrm{Id}$,

Catégories monoïdales

Une catégorie monoïdale est la donnée d'une catégorie $\mathfrak{C}$, d'un bifoncteur – appelé tenseur – $\otimes\colon \mathfrak{C} \times \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$, d'un objet e de $\mathfrak{C}$, et trois isomorphismes naturels $\alpha\colon \cdot \otimes (\cdot \otimes \cdot) \to (\cdot \otimes \cdot) \otimes \cdot$, $\lambda\colon e \otimes \cdot \to \mathsf{Id}$, et $\rho\colon \cdot \otimes e \to \mathsf{Id}$, tels que $\lambda_e = \rho_e$,

Catégories monoïdales

Une catégorie monoïdale est la donnée d'une catégorie $\mathfrak{C}$, d'un bifoncteur – appelé tenseur – $\otimes\colon \mathfrak{C} \times \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C}$, d'un objet e de $\mathfrak{C}$, et trois isomorphismes naturels $\alpha\colon \cdot \otimes (\cdot \otimes \cdot) \rightarrow (\cdot \otimes \cdot) \otimes \cdot$, $\lambda\colon e \otimes \cdot \rightarrow \mathsf{Id}$, et $\rho\colon \cdot \otimes e \rightarrow \mathsf{Id}$, tels que $\lambda_e = \rho_e$, et soumis aux axiomes – dits de cohérence – suivants.

Le triangle

Pour tous les objets a, b de la catégorie $\mathfrak{C}$,

Le triangle

Pour tous les objets a, b de la catégorie $\mathfrak{C}$, le triangle

Le triangle

Pour tous les objets a, b de la catégorie $\mathfrak{C}$, le triangle

$$\begin{tikzcd}
a \otimes (e \otimes c) \arrow[rr, "\alpha_{a,e,c}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_a \otimes \lambda_c"'] & & (a \otimes e) \otimes c \arrow[dl, "\rho_a \otimes \mathrm{id}_c"] \\
& a \otimes c &
\end{tikzcd}$$

Le triangle

Pour tous les objets a, b de la catégorie $\mathfrak{C}$, le triangle

$$\begin{tikzcd} a \otimes (e \otimes c) \arrow[rr, "\alpha_{a,e,c}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_a \otimes \lambda_c"'] & & (a \otimes e) \otimes c \arrow[dl, "\rho_a \otimes \mathrm{id}_c"] \\ & a \otimes c & \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Le pentagone

Pour tous les objets a, b, c et d de la catégorie $\mathfrak{C}$,

Le pentagone

Pour tous les objets a, b, c et d de la catégorie $\mathfrak{C}$, le pentagone

Le pentagone

Pour tous les objets a, b, c et d de la catégorie $\mathfrak{C}$, le pentagone

$$\begin{tikzcd}
& a \otimes (b \otimes (c \otimes d)) \arrow[dl, "\alpha_{a,b,c\otimes d}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_a \otimes \alpha_{b,c,d}"] & \\
(a \otimes b) \otimes (c \otimes d) \arrow[d, "\alpha_{a\otimes b,c,d}"'] & & a \otimes ((b \otimes c) \otimes d) \arrow[d, "\alpha_{a,b\otimes c,d}"] \\
((a \otimes b) \otimes c) \otimes d & & (a \otimes (b \otimes c)) \otimes d \arrow[ll, "\alpha_{a,b,c} \otimes \mathrm{id}_d"]
\end{tikzcd}$$

Le pentagone

Pour tous les objets a, b, c et d de la catégorie $\mathfrak{C}$, le pentagone

$$\begin{tikzcd}
 & a \otimes (b \otimes (c \otimes d)) \arrow[dl, "\alpha_{a,b,c\otimes d}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_a \otimes \alpha_{b,c,d}"] & \\
(a \otimes b) \otimes (c \otimes d) \arrow[d, "\alpha_{a\otimes b,c,d}"'] & & a \otimes ((b \otimes c) \otimes d) \arrow[d, "\alpha_{a,b\otimes c,d}"] \\
((a \otimes b) \otimes c) \otimes d & & (a \otimes (b \otimes c)) \otimes d \arrow[ll, "\alpha_{a,b,c} \otimes \mathrm{id}_d"]
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

Exemples

Exemples

1. Toute catégorie avec un produit, et un objet terminal, est monoïdale;

Exemples

1. Toute catégorie avec un produit, et un objet terminal, est monoïdale;
2. La catégorie PFun des ensembles et fonctions partielles pour le produit cartésien (ensembliste), lequel n'est pas le produit cartésien pour PFun;

Exemples

1. Toute catégorie avec un produit, et un objet terminal, est monoïdale;
2. La catégorie PFun des ensembles et fonctions partielles pour le produit cartésien (ensembliste), lequel n'est pas le produit cartésien pour PFun;
3. La catégorie des carquois (multi-graphes orientés) de sommets S pour le produit fibré (pour les applications “ source ” et “ cible ”);

Exemples

1. Toute catégorie avec un produit, et un objet terminal, est monoïdale;
2. La catégorie PFun des ensembles et fonctions partielles pour le produit cartésien (ensembliste), lequel n'est pas le produit cartésien pour PFun;
3. La catégorie des carquois (multi-graphes orientés) de sommets S pour le produit fibré (pour les applications " source " et " cible ");
4. La catégorie des groupes abéliens avec le produit tensoriel sur $\mathbb{Z}$;

Exemples

1. Toute catégorie avec un produit, et un objet terminal, est monoïdale;
2. La catégorie PFun des ensembles et fonctions partielles pour le produit cartésien (ensembliste), lequel n'est pas le produit cartésien pour PFun;
3. La catégorie des carquois (multi-graphes orientés) de sommets S pour le produit fibré (pour les applications " source " et " cible ");
4. La catégorie des groupes abéliens avec le produit tensoriel sur $\mathbb{Z}$;
5. La catégorie des R-modules (à gauche) avec le produit tensoriel sur R;

Exemples

1. Toute catégorie avec un produit, et un objet terminal, est monoïdale;
2. La catégorie PFun des ensembles et fonctions partielles pour le produit cartésien (ensembliste), lequel n'est pas le produit cartésien pour PFun;
3. La catégorie des carquois (multi-graphes orientés) de sommets S pour le produit fibré (pour les applications “ source ” et “ cible ”);
4. La catégorie des groupes abéliens avec le produit tensoriel sur $\mathbb{Z}$;
5. La catégorie des R-modules (à gauche) avec le produit tensoriel sur R;
6. Soit A une bigèbre (coassociative), alors la catégorie des A-modules à gauche est monoïdale.

Le pentagone (1)

On peut interpréter le pentagone en termes de règles de réécriture.

Le pentagone (1)

On peut interpréter le pentagone en termes de règles de réécriture. Soit X un ensemble non vide, et appelons $\mathrm{Mag}(X)$ le magma libre sur X.

Le pentagone (1)

On peut interpréter le pentagone en termes de règles de réécriture. Soit X un ensemble non vide, et appelons $\mathrm{Mag}(X)$ le magma libre sur X. L'opération (non associative!) du magma est dénotée par une simple juxtaposition (avec des parenthèses éventuellement).

Le pentagone (1)

On peut interpréter le pentagone en termes de règles de réécriture. Soit X un ensemble non vide, et appelons $\mathrm{Mag}(X)$ le magma libre sur X. L'opération (non associative!) du magma est dénotée par une simple juxtaposition (avec des parenthèses éventuellement). On considère le système de réécriture $\Rightarrow_{\mathrm{Ass}}$ de mots non associatifs (ou arbres binaires) engendré par la partie $\mathrm{Ass} = \{(t_1(t_2t_3), (t_1t_2)t_3) \colon t_i \in \mathrm{Mag}(X)\}$

Le pentagone (1)

On peut interpréter le pentagone en termes de règles de réécriture. Soit X un ensemble non vide, et appelons $\mathrm{Mag}(X)$ le magma libre sur X. L'opération (non associative!) du magma est dénotée par une simple juxtaposition (avec des parenthèses éventuellement). On considère le système de réécriture $\Rightarrow_{\mathrm{Ass}}$ de mots non associatifs (ou arbres binaires) engendré par la partie $\mathrm{Ass} = \{(t_1(t_2t_3), (t_1t_2)t_3) \colon t_i \in \mathrm{Mag}(X)\}$ ($\Rightarrow_{\mathrm{Ass}}$ est la plus petite relation binaire compatible avec le produit du magma contenant Ass; on parle de *règles en une étape de réduction*).

Le pentagone (1)

On peut interpréter le pentagone en termes de règles de réécriture. Soit X un ensemble non vide, et appelons $\mathrm{Mag}(X)$ le magma libre sur X. L'opération (non associative!) du magma est dénotée par une simple juxtaposition (avec des parenthèses éventuellement). On considère le système de réécriture $\Rightarrow_{\mathrm{Ass}}$ de mots non associatifs (ou arbres binaires) engendré par la partie $\mathrm{Ass} = \{(t_1(t_2t_3), (t_1t_2)t_3) \colon t_i \in \mathrm{Mag}(X)\}$ ($\Rightarrow_{\mathrm{Ass}}$ est la plus petite relation binaire compatible avec le produit du magma contenant Ass; on parle de *règles en une étape de réduction*). Ce système est nœthérien

Le pentagone (1)

On peut interpréter le pentagone en termes de règles de réécriture. Soit X un ensemble non vide, et appelons $\mathrm{Mag}(X)$ le magma libre sur X. L'opération (non associative!) du magma est dénotée par une simple juxtaposition (avec des parenthèses éventuellement). On considère le système de réécriture $\Rightarrow_{\mathrm{Ass}}$ de mots non associatifs (ou arbres binaires) engendré par la partie $\mathrm{Ass} = \{(t_1(t_2t_3), (t_1t_2)t_3) \colon t_i \in \mathrm{Mag}(X)\}$ ($\Rightarrow_{\mathrm{Ass}}$ est la plus petite relation binaire compatible avec le produit du magma contenant Ass; on parle de *règles en une étape de réduction*). Ce système est nœthérien : pour cela on définit le rang $\mathrm{rg} \colon \mathrm{Mag}(X) \to \mathbb{N}$ par récurrence structurelle $\mathrm{rg}(x) = 0$ pour tout $x \in X$ et $\mathrm{rg}(t_1t_2) = \mathrm{rg}(t_1) + \mathrm{rg}(t_2) + \ell(t_2) - 1$, où $\ell(t)$ est le nombre de lettres dans le mot t.

Le pentagone (1)

On peut interpréter le pentagone en termes de règles de réécriture. Soit X un ensemble non vide, et appelons $\mathrm{Mag}(X)$ le magma libre sur X. L'opération (non associative!) du magma est dénotée par une simple juxtaposition (avec des parenthèses éventuellement). On considère le système de réécriture $\Rightarrow_{\mathrm{Ass}}$ de mots non associatifs (ou arbres binaires) engendré par la partie $\mathrm{Ass} = \{(t_1(t_2t_3), (t_1t_2)t_3) \colon t_i \in \mathrm{Mag}(X)\}$ ($\Rightarrow_{\mathrm{Ass}}$ est la plus petite relation binaire compatible avec le produit du magma contenant Ass; on parle de *règles en une étape de réduction*). Ce système est nœthérien : pour cela on définit le rang $\mathrm{rg} \colon \mathrm{Mag}(X) \to \mathbb{N}$ par récurrence structurelle $\mathrm{rg}(x) = 0$ pour tout $x \in X$ et $\mathrm{rg}(t_1t_2) = \mathrm{rg}(t_1) + \mathrm{rg}(t_2) + \ell(t_2) - 1$, où $\ell(t)$ est le nombre de lettres dans le mot t. Très clairement, $\mathrm{rk}(t) = 0$ signifie que toutes les paires de parenthèses de t sont à gauche.

Le pentagone (1)

On peut interpréter le pentagone en termes de règles de réécriture. Soit X un ensemble non vide, et appelons $\mathrm{Mag}(X)$ le magma libre sur X. L'opération (non associative!) du magma est dénotée par une simple juxtaposition (avec des parenthèses éventuellement). On considère le système de réécriture $\Rightarrow_{\mathrm{Ass}}$ de mots non associatifs (ou arbres binaires) engendré par la partie $\mathrm{Ass} = \{(t_1(t_2t_3), (t_1t_2)t_3) \colon t_i \in \mathrm{Mag}(X)\}$ ($\Rightarrow_{\mathrm{Ass}}$ est la plus petite relation binaire compatible avec le produit du magma contenant Ass; on parle de *règles en une étape de réduction*). Ce système est nœthérien : pour cela on définit le rang $\mathrm{rg} \colon \mathrm{Mag}(X) \to \mathbb{N}$ par récurrence structurelle $\mathrm{rg}(x) = 0$ pour tout $x \in X$ et $\mathrm{rg}(t_1t_2) = \mathrm{rg}(t_1) + \mathrm{rg}(t_2) + \ell(t_2) - 1$, où $\ell(t)$ est le nombre de lettres dans le mot t. Très clairement, $\mathrm{rk}(t) = 0$ signifie que toutes les paires de parenthèses de t sont à gauche. La terminaison provient de ce qu'une application d'une règle de réécriture fait décroître strictement le rang.

Le pentagone (2)

Par ailleurs $\Rightarrow_{\mathsf{Ass}}$ est *localement confluent*

Le pentagone (2)

Par ailleurs $\Rightarrow_{\mathrm{Ass}}$ est *localement confluent* : quels que soient t_1, t_2, t_3 dans $\mathrm{Mag}(X)$ tels que $t_1 \Rightarrow_{\mathrm{Ass}} t_2$ et $t_1 \Rightarrow_{\mathrm{Ass}} t_3$,

Le pentagone (2)

Par ailleurs $\Rightarrow_{\mathrm{Ass}}$ est *localement confluent* : quels que soient t_1, t_2, t_3 dans $\mathrm{Mag}(X)$ tels que $t_1 \Rightarrow_{\mathrm{Ass}} t_2$ et $t_1 \Rightarrow_{\mathrm{Ass}} t_3$, il existe t_4 tel que $t_i \Rightarrow^*_{\mathrm{Ass}} t_4$, $i = 2, 3$ (où $\Rightarrow^*_{\mathrm{Ass}}$ est la clôture transitive et réflexive de $\Rightarrow_{\mathrm{Ass}}$).

Le pentagone (2)

Par ailleurs $\Rightarrow_{\mathrm{Ass}}$ est *localement confluent* : quels que soient t_1, t_2, t_3 dans $\mathrm{Mag}(X)$ tels que $t_1 \Rightarrow_{\mathrm{Ass}} t_2$ et $t_1 \Rightarrow_{\mathrm{Ass}} t_3$, il existe t_4 tel que $t_i \Rightarrow^*_{\mathrm{Ass}} t_4$, $i = 2, 3$ (où $\Rightarrow^*_{\mathrm{Ass}}$ est la clôture transitive et réflexive de $\Rightarrow_{\mathrm{Ass}}$). Soit en terme de diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & t_1 \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
t_2 \arrow[dr, Rightarrow, "*"] & & t_3 \arrow[dl, Rightarrow, "*"'] \\
 & t_4 &
\end{tikzcd}$$

Le pentagone (3)

Le pentagone (3)

Pour vérifier cela il suffit de résoudre les *paires critiques*.

Le pentagone (3)

Pour vérifier cela il suffit de résoudre les *paires critiques*. Ici il n'y en a qu'une, à savoir,

Le pentagone (3)

Pour vérifier cela il suffit de résoudre les *paires critiques*. Ici il n'y en a qu'une, à savoir, $t_1(t_2(t_3 t_4)) \Rightarrow_{\mathrm{Ass}} (t_1 t_2)(t_3 t_4)$ et $t_1(t_2(t_3 t_4)) \Rightarrow_{\mathrm{Ass}} t_1((t_2 t_3) t_4)$

Le pentagone (3)

Pour vérifier cela il suffit de résoudre les *paires critiques*. Ici il n'y en a qu'une, à savoir, $t_1(t_2(t_3 t_4)) \Rightarrow_{\mathrm{Ass}} (t_1 t_2)(t_3 t_4)$ et $t_1(t_2(t_3 t_4)) \Rightarrow_{\mathrm{Ass}} t_1((t_2 t_3) t_4)$ laquelle est résolue en suivant le pentagone précédent!

Le pentagone (3)

Pour vérifier cela il suffit de résoudre les *paires critiques*. Ici il n'y en a qu'une, à savoir, $t_1(t_2(t_3t_4)) \Rightarrow_{\mathsf{Ass}} (t_1t_2)(t_3t_4)$ et $t_1(t_2(t_3t_4)) \Rightarrow_{\mathsf{Ass}} t_1((t_2t_3)t_4)$ laquelle est résolue en suivant le pentagone précédent!

$$
\begin{tikzcd}
 & t_1(t_2(t_3t_4)) \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
(t_1t_2)(t_3t_4) \arrow[d, Rightarrow] & & t_1((t_2t_3)t_4) \arrow[d, Rightarrow] \\
((t_1t_2)t_3)t_4 & & (t_1(t_2t_3))t_4 \arrow[ll, Rightarrow]
\end{tikzcd}
$$

Le pentagone (3)

Pour vérifier cela il suffit de résoudre les *paires critiques*. Ici il n'y en a qu'une, à savoir, $t_1(t_2(t_3t_4)) \Rightarrow_{\mathrm{Ass}} (t_1t_2)(t_3t_4)$ et $t_1(t_2(t_3t_4)) \Rightarrow_{\mathrm{Ass}} t_1((t_2t_3)t_4)$ laquelle est résolue en suivant le pentagone précédent!

$$\begin{tikzcd}
 & t_1(t_2(t_3t_4)) \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
(t_1t_2)(t_3t_4) \arrow[d, Rightarrow] & & t_1((t_2t_3)t_4) \arrow[d, Rightarrow] \\
((t_1t_2)t_3)t_4 & & (t_1(t_2t_3))t_4 \arrow[ll, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

Note : Le pentagone est également le diagramme de Hasse du treillis de Tamari d'ordre 4.

Le pentagone (3)

Pour vérifier cela il suffit de résoudre les *paires critiques*. Ici il n'y en a qu'une, à savoir, $t_1(t_2(t_3t_4)) \Rightarrow_{\mathrm{Ass}} (t_1t_2)(t_3t_4)$ et $t_1(t_2(t_3t_4)) \Rightarrow_{\mathrm{Ass}} t_1((t_2t_3)t_4)$ laquelle est résolue en suivant le pentagone précédent!

$$\begin{tikzcd}
 & t_1(t_2(t_3t_4)) \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
(t_1t_2)(t_3t_4) \arrow[d, Rightarrow] & & t_1((t_2t_3)t_4) \arrow[d, Rightarrow] \\
((t_1t_2)t_3)t_4 & & (t_1(t_2t_3))t_4 \arrow[ll, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

Note : Le pentagone est également le diagramme de Hasse du treillis de Tamari d'ordre 4. La flèche $\Rightarrow_{\mathrm{Ass}}$ représente alors la relation de couverture associée à la structure de poset de Tamari.

Le pentagone (4)

Par le lemme de Newmann le système de réécriture est *confluent*

Le pentagone (4)

Par le lemme de Newmann le système de réécriture est *confluent* : tout élément de $\mathrm{Mag}(X)$ admet une forme normale unique (un élément t de $\mathrm{Mag}(X)$ est une *forme normale* si, et seulement si, il n'existe aucun t' tel que $t \Rightarrow_{\mathrm{Ass}} t'$).

Le pentagone (4)

Par le lemme de Newmann le système de réécriture est *confluent* : tout élément de $\mathrm{Mag}(X)$ admet une forme normale unique (un élément t de $\mathrm{Mag}(X)$ est une *forme normale* si, et seulement si, il n'existe aucun t' tel que $t \Rightarrow_{\mathrm{Ass}} t'$).
Note : Il est facile de voir que le quotient du magma libre sur X par la congruence $\Leftrightarrow^{*}_{\mathrm{Ass}}$ (clôture symétrique de $\Rightarrow^{*}_{\mathrm{Ass}}$) est le semi-groupe libre sur X.

Le pentagone (4)

Supposons maintenant que l'on s'est donné une congruence $\cong$ magmatique sur un magma $(M, *)$ qui satisfait

Le pentagone (4)

Supposons maintenant que l'on s'est donné une congruence $\cong$ magmatique sur un magma $(M, *)$ qui satisfait $(x * y) * z \cong x * (y * z)$ pour tous $x, y, z \in M$.

Le pentagone (4)

Supposons maintenant que l'on s'est donné une congruence $\cong$ magmatique sur un magma $(M, *)$ qui satisfait $(x * y) * z \cong x * (y * z)$ pour tous $x, y, z \in M$. Il est alors naturel de se demander si tous les "mots" de M qui ne diffèrent que par le placement des parenthèses sont équivalents modulo $\cong$ (autrement dit $M/\cong$ est un semi-groupe).

Le pentagone (4)

Supposons maintenant que l'on s'est donné une congruence $\cong$ magmatique sur un magma $(M, *)$ qui satisfait $(x * y) * z \cong x * (y * z)$ pour tous $x, y, z \in M$. Il est alors naturel de se demander si tous les "mots" de M qui ne diffèrent que par le placement des parenthèses sont équivalents modulo $\cong$ (autrement dit $M/\cong$ est un semi-groupe). Le problème est mal posé : il faut se placer dans le cadre " libre " pour raisonner.

Le pentagone (4)

Supposons maintenant que l'on s'est donné une congruence $\cong$ magmatique sur un magma $(M, *)$ qui satisfait $(x * y) * z \cong x * (y * z)$ pour tous $x, y, z \in M$. Il est alors naturel de se demander si tous les "mots" de M qui ne diffèrent que par le placement des parenthèses sont équivalents modulo $\cong$ (autrement dit $M/\cong$ est un semi-groupe). Le problème est mal posé : il faut se placer dans le cadre " libre " pour raisonner. Par universalité de $\mathrm{Mag}(X)$, on considère l'unique homomorphisme de magmas $\pi\colon \mathrm{Mag}(M) \to M$ tel que $\pi(x) = x$ pour chaque $x \in M$.

Le pentagone (4)

Supposons maintenant que l'on s'est donné une congruence $\cong$ magmatique sur un magma $(M, *)$ qui satisfait $(x * y) * z \cong x * (y * z)$ pour tous $x, y, z \in M$. Il est alors naturel de se demander si tous les "mots" de M qui ne diffèrent que par le placement des parenthèses sont équivalents modulo $\cong$ (autrement dit $M/\cong$ est un semi-groupe). Le problème est mal posé : il faut se placer dans le cadre " libre " pour raisonner. Par universalité de $\mathrm{Mag}(X)$, on considère l'unique homomorphisme de magmas $\pi\colon \mathrm{Mag}(M) \to M$ tel que $\pi(x) = x$ pour chaque $x \in M$. Alors on démontre que quels que soient $t, t' \in \mathrm{Mag}(M)$, si $t \Rightarrow^*_{\mathrm{Ass}} t'$, alors $\pi(t) \cong \pi(t')$.

Le pentagone : mise en perspective historique (1)

Ce résultat est inspiré par les travaux de Jim Stasheff, sur un polytope convexe appelé “ associaèdre ” (dont certaines de ses faces sont consituées par des pentagones, et dont les 1-cellules forment les diagrammes de Hasse des treillis de Tamari à tout ordre),

Le pentagone : mise en perspective historique (1)

Ce résultat est inspiré par les travaux de Jim Stasheff, sur un polytope convexe appelé “ associaèdre ” (dont certaines de ses faces sont consituées par des pentagones, et dont les 1-cellules forment les diagrammes de Hasse des treillis de Tamari à tout ordre), concernant les espaces A_∞ – structures topologiques, généralisant les *espaces H* (multiplication continue + identité à homotopie près),

Le pentagone : mise en perspective historique (1)

Ce résultat est inspiré par les travaux de Jim Stasheff, sur un polytope convexe appelé " associaèdre " (dont certaines de ses faces sont consituées par des pentagones, et dont les 1-cellules forment les diagrammes de Hasse des treillis de Tamari à tout ordre), concernant les espaces A_∞ – structures topologiques, généralisant les *espaces H* (multiplication continue + identité à homotopie près), munies d'un produit associatif à homotopie près – si μ désigne une application continue de $X \times X$ dans X,

Le pentagone : mise en perspective historique (1)

Ce résultat est inspiré par les travaux de Jim Stasheff, sur un polytope convexe appelé “ associaèdre ” (dont certaines de ses faces sont consituées par des pentagones, et dont les 1-cellules forment les diagrammes de Hasse des treillis de Tamari à tout ordre), concernant les espaces A_∞ – structures topologiques, généralisant les *espaces H* (multiplication continue + identité à homotopie près), munies d'un produit associatif à homotopie près – si μ désigne une application continue de $X \times X$ dans X, on veut notamment que les applications continues $\mu \circ (\mu \times \mathrm{id}_X)$ et $\mu \circ (\mathrm{id}_X \times \mu)$ soient homotopes (on appelle cela un *espace* A_3).

Le pentagone : mise en perspective historique (1)

Ce résultat est inspiré par les travaux de Jim Stasheff, sur un polytope convexe appelé “ associaèdre ” (dont certaines de ses faces sont consituées par des pentagones, et dont les 1-cellules forment les diagrammes de Hasse des treillis de Tamari à tout ordre), concernant les espaces A_∞ – structures topologiques, généralisant les *espaces H* (multiplication continue + identité à homotopie près), munies d'un produit associatif à homotopie près – si μ désigne une application continue de $X \times X$ dans X, on veut notamment que les applications continues $\mu \circ (\mu \times \mathrm{id}_X)$ et $\mu \circ (\mathrm{id}_X \times \mu)$ soient homotopes (on appelle cela un *espace* A_3). Par exemple (cas très particulier) :

Le pentagone : mise en perspective historique (1)

Ce résultat est inspiré par les travaux de Jim Stasheff, sur un polytope convexe appelé " associaèdre " (dont certaines de ses faces sont consituées par des pentagones, et dont les 1-cellules forment les diagrammes de Hasse des treillis de Tamari à tout ordre), concernant les espaces A_∞ – structures topologiques, généralisant les *espaces H* (multiplication continue + identité à homotopie près), munies d'un produit associatif à homotopie près – si μ désigne une application continue de $X \times X$ dans X, on veut notamment que les applications continues $\mu \circ (\mu \times \mathrm{id}_X)$ et $\mu \circ (\mathrm{id}_X \times \mu)$ soient homotopes (on appelle cela un *espace* A_3). Par exemple (cas très particulier) : Soient Y un espace H avec multiplication μ associative, et X un espace topologique.

Le pentagone : mise en perspective historique (1)

Ce résultat est inspiré par les travaux de Jim Stasheff, sur un polytope convexe appelé “ associaèdre ” (dont certaines de ses faces sont consituées par des pentagones, et dont les 1-cellules forment les diagrammes de Hasse des treillis de Tamari à tout ordre), concernant les espaces A_∞ – structures topologiques, généralisant les *espaces H* (multiplication continue + identité à homotopie près), munies d'un produit associatif à homotopie près – si μ désigne une application continue de $X \times X$ dans X, on veut notamment que les applications continues $\mu \circ (\mu \times \mathrm{id}_X)$ et $\mu \circ (\mathrm{id}_X \times \mu)$ soient homotopes (on appelle cela un *espace* A_3). Par exemple (cas très particulier) : Soient Y un espace H avec multiplication μ associative, et X un espace topologique. Soient $f\colon X \to Y$ et $g\colon Y \to X$ deux applications inverses l'une de l'autre à homotopie près ($fg \sim \mathrm{id}_Y$ et $gf \sim \mathrm{id}_X$).

Le pentagone : mise en perspective historique (1)

Ce résultat est inspiré par les travaux de Jim Stasheff, sur un polytope convexe appelé “ associaèdre ” (dont certaines de ses faces sont consituées par des pentagones, et dont les 1-cellules forment les diagrammes de Hasse des treillis de Tamari à tout ordre), concernant les espaces A_∞ – structures topologiques, généralisant les *espaces H* (multiplication continue + identité à homotopie près), munies d'un produit associatif à homotopie près – si μ désigne une application continue de $X \times X$ dans X, on veut notamment que les applications continues $\mu \circ (\mu \times \mathrm{id}_X)$ et $\mu \circ (\mathrm{id}_X \times \mu)$ soient homotopes (on appelle cela un *espace* A_3). Par exemple (cas très particulier) : Soient Y un espace H avec multiplication μ associative, et X un espace topologique. Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ deux applications inverses l'une de l'autre à homotopie près ($fg \sim \mathrm{id}_Y$ et $gf \sim \mathrm{id}_X$). Alors X est un espace A_∞.

Le pentagone : mise en perspective historique (2)

Si X est un espace H ($+$ autres proriétés),

Le pentagone : mise en perspective historique (2)

Si X est un espace H ($+$ autres proriétés), alors son anneau de cohomologie (avec le produit-cup) à coefficients dans un anneau commutatif R,

Le pentagone : mise en perspective historique (2)

Si X est un espace H ($+$ autres proriétés), alors son anneau de cohomologie (avec le produit-cup) à coefficients dans un anneau commutatif R, est une algèbre de Hopf.

Le pentagone : mise en perspective historique (2)

Si X est un espace H (+ autres proriétés), alors son anneau de cohomologie (avec le produit-cup) à coefficients dans un anneau commutatif R, est une algèbre de Hopf. Si de plus X est un espace A_3,

Le pentagone : mise en perspective historique (2)

Si X est un espace H ($+$ autres proriétés), alors son anneau de cohomologie (avec le produit-cup) à coefficients dans un anneau commutatif R, est une algèbre de Hopf. Si de plus X est un espace A_3, son groupe d'homologie (à coefficients dans R) devient une R-algèbre (avec le produit de Pontryagin).

Le pentagone : mise en perspective historique (2)

Si X est un espace H ($+$ autres proriétés), alors son anneau de cohomologie (avec le produit-cup) à coefficients dans un anneau commutatif R, est une algèbre de Hopf. Si de plus X est un espace A_3, son groupe d'homologie (à coefficients dans R) devient une R-algèbre (avec le produit de Pontryagin). En fait, il s'agit de l'algèbre de Hopf duale de la précédente.

Le pentagone : mise en perspective historique (2)

Si X est un espace H ($+$ autres proriétés), alors son anneau de cohomologie (avec le produit-cup) à coefficients dans un anneau commutatif R, est une algèbre de Hopf. Si de plus X est un espace A_3, son groupe d'homologie (à coefficients dans R) devient une R-algèbre (avec le produit de Pontryagin). En fait, il s'agit de l'algèbre de Hopf duale de la précédente. Ceci explique l'emploi de la dénomination d'espace H.

Fixons $\mathbb{K}$ un corps.

Fixons $\mathbb{K}$ un corps. Une $\mathbb{K}$-*algèbre* (associative avec unité) est un monoïde dans la catégorie monoïdale des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Fixons $\mathbb{K}$ un corps. Une $\mathbb{K}$-*algèbre* (associative avec unité) est un monoïde dans la catégorie monoïdale des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Autrement dit il s'agit d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel A avec deux applications linéaires $\mu \colon A \otimes_{\mathbb{K}} A \to A$ et $\eta \colon \mathbb{K} \to A$ faisant commuter les diagrammes suivants :

Fixons $\mathbb{K}$ un corps. Une $\mathbb{K}$-*algèbre* (associative avec unité) est un monoïde dans la catégorie monoïdale des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Autrement dit il s'agit d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel A avec deux applications linéaires $\mu\colon A \otimes_{\mathbb{K}} A \to A$ et $\eta\colon \mathbb{K} \to A$ faisant commuter les diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes A) \otimes A \arrow[d, "\mu\otimes\mathrm{id}_A"'] & & A \otimes (A \otimes A) \arrow[ll, "\alpha_{A,A,A}"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_A\otimes\mu"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\mu"'] & A & A \otimes A \arrow[l, "\mu"]
\end{tikzcd}$$

Fixons $\mathbb{K}$ un corps. Une $\mathbb{K}$-*algèbre* (associative avec unité) est un monoïde dans la catégorie monoïdale des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Autrement dit il s'agit d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel A avec deux applications linéaires $\mu\colon A \otimes_{\mathbb{K}} A \to A$ et $\eta\colon \mathbb{K} \to A$ faisant commuter les diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes A) \otimes A \arrow[d, "\mu\otimes\mathrm{id}_A"'] & & A \otimes (A \otimes A) \arrow[ll, "\alpha_{A,A,A}"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_A\otimes\mu"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\mu"'] & A & A \otimes A \arrow[l, "\mu"]
\end{tikzcd}$$

et

Fixons $\mathbb{K}$ un corps. Une $\mathbb{K}$-*algèbre* (associative avec unité) est un monoïde dans la catégorie monoïdale des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Autrement dit il s'agit d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel A avec deux applications linéaires $\mu\colon A \otimes_{\mathbb{K}} A \to A$ et $\eta\colon \mathbb{K} \to A$ faisant commuter les diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes A) \otimes A \arrow[d, "\mu\otimes\mathrm{id}_A"'] & & & A \otimes (A \otimes A) \arrow[lll, "\alpha_{A,A,A}"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_A\otimes\mu"] \\
A \otimes A \arrow[rr, "\mu"'] & & A & A \otimes A \arrow[l, "\mu"]
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K} \otimes A \arrow[r, "\eta\otimes\mathrm{id}_A"] \arrow[dr, "\lambda_A"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] & A \otimes \mathbb{K} \arrow[l, "\mathrm{id}_A\otimes\eta"'] \arrow[dl, "\rho_A"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Une $\mathbb{K}$-*cogèbre* (coassociative avec coünité) est un monoïde dans la catégorie monoïdale opposée à celle des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, Une $\mathbb{K}$-*cogèbre* (coassociative avec coünité) est un monoïde dans la catégorie monoïdale opposée à celle des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, ou un comonoïde dans cette dernière.

Une $\mathbb{K}$-*cogèbre* (coassociative avec coünité) est un monoïde dans la catégorie monoïdale opposée à celle des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, ou un comonoïde dans cette dernière. Autrement dit il s'agit d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel C avec deux applications linéaires $\Delta\colon C \to C \otimes_{\mathbb{K}} C$ et $\epsilon\colon C \to \mathbb{K}$ faisant commuter les diagrammes suivants :

Une $\mathbb{K}$-*cogèbre* (coassociative avec coünité) est un monoïde dans la catégorie monoïdale opposée à celle des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, ou un comonoïde dans cette dernière. Autrement dit il s'agit d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel C avec deux applications linéaires $\Delta\colon C \to C \otimes_{\mathbb{K}} C$ et $\epsilon\colon C \to \mathbb{K}$ faisant commuter les diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd}
C \otimes C \arrow[d, "\Delta\otimes\mathrm{id}_C"'] & C \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Delta"] & C \otimes C \arrow[d, "\mathrm{id}_C\otimes\Delta"] \\
(C \otimes C) \otimes C & & C \otimes (C \otimes C) \arrow[ll, "\alpha_{C,C,C}"]
\end{tikzcd}$$

Une $\mathbb{K}$-*cogèbre* (coassociative avec coünité) est un monoïde dans la catégorie monoïdale opposée à celle des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, ou un comonoïde dans cette dernière. Autrement dit il s'agit d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel C avec deux applications linéaires $\Delta\colon C \to C \otimes_{\mathbb{K}} C$ et $\epsilon\colon C \to \mathbb{K}$ faisant commuter les diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd}
C \otimes C \arrow[d, "\Delta \otimes \mathrm{id}_C"'] & C \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Delta"] & C \otimes C \arrow[d, "\mathrm{id}_C \otimes \Delta"] \\
(C \otimes C) \otimes C & & C \otimes (C \otimes C) \arrow[ll, "\alpha_{C,C,C}"]
\end{tikzcd}$$

et

Une $\mathbb{K}$-*cogèbre* (coassociative avec coünité) est un monoïde dans la catégorie monoïdale opposée à celle des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, ou un comonoïde dans cette dernière. Autrement dit il s'agit d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel C avec deux applications linéaires $\Delta\colon C \to C \otimes_{\mathbb{K}} C$ et $\epsilon\colon C \to \mathbb{K}$ faisant commuter les diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd}
C \otimes C \arrow[d, "\Delta \otimes \mathrm{id}_C"'] & C \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Delta"] & C \otimes C \arrow[d, "\mathrm{id}_C \otimes \Delta"] \\
(C \otimes C) \otimes C & & C \otimes (C \otimes C) \arrow[ll, "\alpha_{C,C,C}"]
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K} \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "\epsilon \otimes \mathrm{id}_C"'] \arrow[r, "\mathrm{id}_C \otimes \epsilon"] & C \otimes \mathbb{K} \\
& C \arrow[ul, "\lambda_C^{-1}"] \arrow[u, "\Delta"] \arrow[ur, "\rho_C^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

Une $\mathbb{K}$-*cogèbre* (coassociative avec coünité) est un monoïde dans la catégorie monoïdale opposée à celle des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, ou un comonoïde dans cette dernière. Autrement dit il s'agit d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel C avec deux applications linéaires $\Delta \colon C \to C \otimes_{\mathbb{K}} C$ et $\epsilon \colon C \to \mathbb{K}$ faisant commuter les diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd}
C \otimes C \arrow[d, "\Delta \otimes \mathrm{id}_C"'] & C \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Delta"] & C \otimes C \arrow[d, "\mathrm{id}_C \otimes \Delta"] \\
(C \otimes C) \otimes C & & C \otimes (C \otimes C) \arrow[ll, "\alpha_{C,C,C}"]
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K} \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "\epsilon \otimes \mathrm{id}_C"'] \arrow[r, "\mathrm{id}_C \otimes \epsilon"] & C \otimes \mathbb{K} \\
& C \arrow[ul, "\lambda_C^{-1}"] \arrow[u, "\Delta"] \arrow[ur, "\rho_C^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

Les $\mathbb{K}$-cogèbres forment la catégorie opposée à celle des $\mathbb{K}$-algèbres.

Une $\mathbb{K}$-*bigèbre* est un objet qui est à la fois une algèbre et une cogèbre et donc les applications de structure sont des morphismes pour les catégories opposées (un *bimonoïde*).

Une $\mathbb{K}$-*bigèbre* est un objet qui est à la fois une algèbre et une cogèbre et donc les applications de structure sont des morphismes pour les catégories opposées (un *bimonoïde*). Une algèbre de Hopf est une bigèbre munie d'une application antipodale.

Catégorie monoïdale des modules sur une bigèbre

Soit (A, μ, η) une $\mathbb{K}$-algèbre.

Catégorie monoïdale des modules sur une bigèbre

Soit (A, μ, η) une $\mathbb{K}$-algèbre. Soit U, V deux A-modules à gauche.

Catégorie monoïdale des modules sur une bigèbre

Soit (A, μ, η) une $\mathbb{K}$-algèbre. Soit U, V deux A-modules à gauche. Le produit tensoriel $U \otimes_{\mathbb{K}} V$ est naturellement un $A \otimes_{\mathbb{K}} A$-module à gauche sous l'action diagonale $(a \otimes a')(u \otimes v) = au \otimes a'v$.

Catégorie monoïdale des modules sur une bigèbre

Soit (A, μ, η) une $\mathbb{K}$-algèbre. Soit U, V deux A-modules à gauche. Le produit tensoriel $U \otimes_{\mathbb{K}} V$ est naturellement un $A \otimes_{\mathbb{K}} A$-module à gauche sous l'action diagonale $(a \otimes a')(u \otimes v) = au \otimes a'v$. Si maintenant on considère une $\mathbb{K}$-bigèbre $(B, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$,

Catégorie monoïdale des modules sur une bigèbre

Soit (A, μ, η) une $\mathbb{K}$-algèbre. Soit U, V deux A-modules à gauche. Le produit tensoriel $U \otimes_{\mathbb{K}} V$ est naturellement un $A \otimes_{\mathbb{K}} A$-module à gauche sous l'action diagonale $(a \otimes a')(u \otimes v) = au \otimes a'v$. Si maintenant on considère une $\mathbb{K}$-bigèbre $(B, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$, alors $U \otimes V$ possède une structure de B-module à gauche (pour la structure d'algèbre sous-jacente à B) via le coproduit Δ à l'aide de l'action

Catégorie monoïdale des modules sur une bigèbre

Soit (A, μ, η) une $\mathbb{K}$-algèbre. Soit U, V deux A-modules à gauche. Le produit tensoriel $U \otimes_{\mathbb{K}} V$ est naturellement un $A \otimes_{\mathbb{K}} A$-module à gauche sous l'action diagonale $(a \otimes a')(u \otimes v) = au \otimes a'v$. Si maintenant on considère une $\mathbb{K}$-bigèbre $(B, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$, alors $U \otimes V$ possède une structure de B-module à gauche (pour la structure d'algèbre sous-jacente à B) via le coproduit Δ à l'aide de l'action $a \cdot (u \otimes v) = \Delta(a)(u \otimes v)$.

Catégorie monoïdale des modules sur une bigèbre

Soit (A, μ, η) une $\mathbb{K}$-algèbre. Soit U, V deux A-modules à gauche. Le produit tensoriel $U \otimes_{\mathbb{K}} V$ est naturellement un $A \otimes_{\mathbb{K}} A$-module à gauche sous l'action diagonale $(a \otimes a')(u \otimes v) = au \otimes a'v$. Si maintenant on considère une $\mathbb{K}$-bigèbre $(B, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$, alors $U \otimes V$ possède une structure de B-module à gauche (pour la structure d'algèbre sous-jacente à B) via le coproduit Δ à l'aide de l'action $a \cdot (u \otimes v) = \Delta(a)(u \otimes v)$. La coünité permet d'équiper un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V d'une structure triviale de B-module à gauche

Catégorie monoïdale des modules sur une bigèbre

Soit (A, μ, η) une $\mathbb{K}$-algèbre. Soit U, V deux A-modules à gauche. Le produit tensoriel $U \otimes_{\mathbb{K}} V$ est naturellement un $A \otimes_{\mathbb{K}} A$-module à gauche sous l'action diagonale $(a \otimes a')(u \otimes v) = au \otimes a'v$. Si maintenant on considère une $\mathbb{K}$-bigèbre $(B, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$, alors $U \otimes V$ possède une structure de B-module à gauche (pour la structure d'algèbre sous-jacente à B) via le coproduit Δ à l'aide de l'action $a \cdot (u \otimes v) = \Delta(a)(u \otimes v)$. La coünité permet d'équiper un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V d'une structure triviale de B-module à gauche : $a \cdot v = \epsilon(a)v$.

Catégorie monoïdale des modules sur une bigèbre

Soit (A, μ, η) une $\mathbb{K}$-algèbre. Soit U, V deux A-modules à gauche. Le produit tensoriel $U \otimes_{\mathbb{K}} V$ est naturellement un $A \otimes_{\mathbb{K}} A$-module à gauche sous l'action diagonale $(a \otimes a')(u \otimes v) = au \otimes a'v$. Si maintenant on considère une $\mathbb{K}$-bigèbre $(B, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$, alors $U \otimes V$ possède une structure de B-module à gauche (pour la structure d'algèbre sous-jacente à B) via le coproduit Δ à l'aide de l'action $a \cdot (u \otimes v) = \Delta(a)(u \otimes v)$. La coünité permet d'équiper un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V d'une structure triviale de B-module à gauche : $a \cdot v = \epsilon(a)v$.

Théorème

La catégorie des B-modules à gauche est monoïdale pour le produit tensoriel sur $\mathbb{K}$.

Catégorie monoïdale des modules sur une bigèbre

Soit (A, μ, η) une $\mathbb{K}$-algèbre. Soit U, V deux A-modules à gauche. Le produit tensoriel $U \otimes_{\mathbb{K}} V$ est naturellement un $A \otimes_{\mathbb{K}} A$-module à gauche sous l'action diagonale $(a \otimes a')(u \otimes v) = au \otimes a'v$. Si maintenant on considère une $\mathbb{K}$-bigèbre $(B, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$, alors $U \otimes V$ possède une structure de B-module à gauche (pour la structure d'algèbre sous-jacente à B) via le coproduit Δ à l'aide de l'action $a \cdot (u \otimes v) = \Delta(a)(u \otimes v)$. La coünité permet d'équiper un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V d'une structure triviale de B-module à gauche : $a \cdot v = \epsilon(a)v$.

Théorème

La catégorie des B-modules à gauche est monoïdale pour le produit tensoriel sur $\mathbb{K}$.

(On utilise évidemment le fait que Δ est coassociatif et est un morphisme d'algèbres.)

Quasi-bigèbres

Vladimir Drinfel'd (médaille Fields en 1990, co-découvreur des groupes quantiques avec Michio Jimbo)

Quasi-bigèbres

Vladimir Drinfel'd (médaille Fields en 1990, co-découvreur des groupes quantiques avec Michio Jimbo) a introduit la notion de *quasi-bigèbre* en affaiblissant la propriété de coassociativité

Quasi-bigèbres

Vladimir Drinfel'd (médaille Fields en 1990, co-découvreur des groupes quantiques avec Michio Jimbo) a introduit la notion de *quasi-bigèbre* en affaiblissant la propriété de coassociativité mais de façon contrôlée

Quasi-bigèbres

Vladimir Drinfel'd (médaille Fields en 1990, co-découvreur des groupes quantiques avec Michio Jimbo) a introduit la notion de *quasi-bigèbre* en affaiblissant la propriété de coassociativité mais de façon contrôlée : le but étant que le théorème précédent reste vrai.

Quasi-bigèbres

Vladimir Drinfel'd (médaille Fields en 1990, co-découvreur des groupes quantiques avec Michio Jimbo) a introduit la notion de *quasi-bigèbre* en affaiblissant la propriété de coassociativité mais de façon contrôlée : le but étant que le théorème précédent reste vrai. Il fait cela dans le cadre général d'algèbres complètes (au sens de la topologie h-adique) sur $\mathbb{K}[[h]]$ et donc utilise un produit tensoriel complété

Quasi-bigèbres

Vladimir Drinfel'd (médaille Fields en 1990, co-découvreur des groupes quantiques avec Michio Jimbo) a introduit la notion de *quasi-bigèbre* en affaiblissant la propriété de coassociativité mais de façon contrôlée : le but étant que le théorème précédent reste vrai. Il fait cela dans le cadre général d'algèbres complètes (au sens de la topologie h-adique) sur $\mathbb{K}[[h]]$ et donc utilise un produit tensoriel complété (ce type de structures apparaît dans le cadre des déformations formelles d'algèbres).

Quasi-bigèbres

Vladimir Drinfel'd (médaille Fields en 1990, co-découvreur des groupes quantiques avec Michio Jimbo) a introduit la notion de *quasi-bigèbre* en affaiblissant la propriété de coassociativité mais de façon contrôlée : le but étant que le théorème précédent reste vrai. Il fait cela dans le cadre général d'algèbres complètes (au sens de la topologie h-adique) sur $\mathbb{K}[[h]]$ et donc utilise un produit tensoriel complété (ce type de structures apparaît dans le cadre des déformations formelles d'algèbres). Une présentation en est fait ici dans un cadre purement algébrique (pas de topologie).

Soit (A, Δ, ϵ) la donnée d'une $\mathbb{K}$-algèbre A, Soit (A, Δ, ϵ) la donnée d'une $\mathbb{K}$-algèbre A, et de deux morphismes d'algèbres : une *comultiplication* $\Delta \colon A \to A \otimes_{\mathbb{K}} A$ et une *coünité* $\epsilon \colon A \to \mathbb{K}$ (aucun n'axiome n'est requis à ce stade).

Soit (A, Δ, ϵ) la donnée d'une $\mathbb{K}$-algèbre A, et de deux morphismes d'algèbres : une *comultiplication* $\Delta\colon A \to A \otimes_{\mathbb{K}} A$ et une *coünité* $\epsilon\colon A \to \mathbb{K}$ (aucun n'axiome n'est requis à ce stade). On dit que (A, Δ, ϵ) est une *quasi-bigèbre*

Soit (A, Δ, ϵ) la donnée d'une $\mathbb{K}$-algèbre A, et de deux morphismes d'algèbres : une *comultiplication* $\Delta \colon A \to A \otimes_{\mathbb{K}} A$ et une *coünité* $\epsilon \colon A \to \mathbb{K}$ (aucun n'axiome n'est requis à ce stade). On dit que (A, Δ, ϵ) est une *quasi-bigèbre* si, et seulement si, la catégorie des A-modules à gauche avec le produit tensoriel sur $\mathbb{K}$ est monoïdale.

Soit (A, Δ, ϵ) la donnée d'une $\mathbb{K}$-algèbre A, et de deux morphismes d'algèbres : une *comultiplication* $\Delta \colon A \to A \otimes_{\mathbb{K}} A$ et une *coünité* $\epsilon \colon A \to \mathbb{K}$ (aucun n'axiome n'est requis à ce stade). On dit que (A, Δ, ϵ) est une *quasi-bigèbre* si, et seulement si, la catégorie des A-modules à gauche avec le produit tensoriel sur $\mathbb{K}$ est monoïdale. En d'autres termes, (A, Δ, ϵ) est une quasi-bigèbre s'il existe des isomorphismes naturels d'associativité $\alpha_{U,V,W}$, d'identité à gauche λ_U et à droite ρ_U satisfaisant le pentagone et le triangle.

Théorème (Drinfel'd 1989)

Soit (A, Δ, ϵ) une algèbre avec comultiplication et coünité.

Théorème (Drinfel'd 1989)

Soit (A, Δ, ϵ) une algèbre avec comultiplication et coünité. C'est une quasi-bigèbre si, et seulement si, il existe un élément Φ inversible de $A \otimes_{\mathbb{K}} A \otimes_{\mathbb{K}} A$, et deux éléments inversibles ℓ et r de A vérifiant pour tout $a \in A$

Théorème (Drinfel'd 1989)

Soit (A, Δ, ϵ) une algèbre avec comultiplication et coünité. C'est une quasi-bigèbre si, et seulement si, il existe un élément Φ inversible de $A \otimes_{\mathbb{K}} A \otimes_{\mathbb{K}} A$, et deux éléments inversibles ℓ et r de A vérifiant pour tout $a \in A$

1. $(\mathrm{id}_A \otimes \Delta)(\Delta(a)) = \Phi\left((\Delta \otimes \mathrm{id})(\Delta(a))\right)\Phi^{-1}$ (coassociativité à conjugaison près);

Théorème (Drinfel'd 1989)

Soit (A, Δ, ϵ) une algèbre avec comultiplication et coünité. C'est une quasi-bigèbre si, et seulement si, il existe un élément Φ inversible de $A \otimes_{\mathbb{K}} A \otimes_{\mathbb{K}} A$, et deux éléments inversibles ℓ et r de A vérifiant pour tout $a \in A$

1. $(\mathrm{id}_A \otimes \Delta)(\Delta(a)) = \Phi\left((\Delta \otimes \mathrm{id})(\Delta(a))\right)\Phi^{-1}$ (coassociativité à conjugaison près);
2. $(\epsilon \otimes \mathrm{id}_A)(\Delta(a)) = \ell^{-1} a \ell$,

Théorème (Drinfel'd 1989)

Soit (A, Δ, ϵ) une algèbre avec comultiplication et coünité. C'est une quasi-bigèbre si, et seulement si, il existe un élément Φ inversible de $A \otimes_{\mathbb{K}} A \otimes_{\mathbb{K}} A$, et deux éléments inversibles ℓ et r de A vérifiant pour tout $a \in A$

1. $(\mathrm{id}_A \otimes \Delta)(\Delta(a)) = \Phi\left((\Delta \otimes \mathrm{id})(\Delta(a))\right)\Phi^{-1}$ (coassociativité à conjugaison près);
2. $(\epsilon \otimes \mathrm{id}_A)(\Delta(a)) = \ell^{-1}a\ell$, $(\mathrm{id}_A \otimes \epsilon)(\Delta(a)) = r^{-1}ar$;

Théorème (Drinfel'd 1989)

Soit (A, Δ, ϵ) une algèbre avec comultiplication et coünité. C'est une quasi-bigèbre si, et seulement si, il existe un élément Φ inversible de $A \otimes_{\mathbb{K}} A \otimes_{\mathbb{K}} A$, et deux éléments inversibles ℓ et r de A vérifiant pour tout $a \in A$

1. $(\mathrm{id}_A \otimes \Delta)(\Delta(a)) = \Phi\left((\Delta \otimes \mathrm{id})(\Delta(a))\right)\Phi^{-1}$ (coassociativité à conjugaison près);
2. $(\epsilon \otimes \mathrm{id}_A)(\Delta(a)) = \ell^{-1}a\ell$, $(\mathrm{id}_A \otimes \epsilon)(\Delta(a)) = r^{-1}ar$;
3. $(\mathrm{id}_A \otimes \mathrm{id}_A \otimes \Delta)(\Phi)(\Delta \otimes \mathrm{id}_A \otimes \mathrm{id}_A)(\Phi) = 1 \otimes \Phi(\mathrm{id}_A \otimes \Delta \otimes \mathrm{id}_A)(\Phi)\Phi \otimes 1$;

Théorème (Drinfel'd 1989)

Soit (A, Δ, ϵ) une algèbre avec comultiplication et coünité. C'est une quasi-bigèbre si, et seulement si, il existe un élément Φ inversible de $A \otimes_{\mathbb{K}} A \otimes_{\mathbb{K}} A$, et deux éléments inversibles ℓ et r de A vérifiant pour tout $a \in A$

1. $(\mathrm{id}_A \otimes \Delta)(\Delta(a)) = \Phi\left((\Delta \otimes \mathrm{id})(\Delta(a))\right)\Phi^{-1}$ (coassociativité à conjugaison près);
2. $(\epsilon \otimes \mathrm{id}_A)(\Delta(a)) = \ell^{-1} a \ell$, $(\mathrm{id}_A \otimes \epsilon)(\Delta(a)) = r^{-1} a r$;
3. $(\mathrm{id}_A \otimes \mathrm{id}_A \otimes \Delta)(\Phi)(\Delta \otimes \mathrm{id}_A \otimes \mathrm{id}_A)(\Phi) = 1 \otimes \Phi(\mathrm{id}_A \otimes \Delta \otimes \mathrm{id}_A)(\Phi)\Phi \otimes 1$;
4. $(\mathrm{id}_A \otimes \epsilon \otimes \mathrm{id}_A)(\Phi) = r \otimes \ell^{-1}$.

Théorème (Drinfel'd 1989)

Soit (A, Δ, ϵ) une algèbre avec comultiplication et coünité. C'est une quasi-bigèbre si, et seulement si, il existe un élément Φ inversible de $A \otimes_{\mathbb{K}} A \otimes_{\mathbb{K}} A$, et deux éléments inversibles ℓ et r de A vérifiant pour tout $a \in A$

1. $(\mathrm{id}_A \otimes \Delta)(\Delta(a)) = \Phi\left((\Delta \otimes \mathrm{id})(\Delta(a))\right)\Phi^{-1}$ (coassociativité à conjugaison près);
2. $(\epsilon \otimes \mathrm{id}_A)(\Delta(a)) = \ell^{-1}a\ell$, $(\mathrm{id}_A \otimes \epsilon)(\Delta(a)) = r^{-1}ar$;
3. $(\mathrm{id}_A \otimes \mathrm{id}_A \otimes \Delta)(\Phi)(\Delta \otimes \mathrm{id}_A \otimes \mathrm{id}_A)(\Phi) = 1 \otimes \Phi(\mathrm{id}_A \otimes \Delta \otimes \mathrm{id}_A)(\Phi)\Phi \otimes 1$;
4. $(\mathrm{id}_A \otimes \epsilon \otimes \mathrm{id}_A)(\Phi) = r \otimes \ell^{-1}$.

L'élément Φ est appelé *associateur de Drinfel'd*.

Si on se donne Φ, ℓ et r satisfaisant les relations du théorème précédent, Si on se donne Φ, ℓ et r satisfaisant les relations du théorème précédent, alors on construit des applications $\alpha_{U,V,W}(u \otimes (v \otimes w)) = \Phi((u \otimes v) \otimes w)$, $\lambda_U(1 \otimes u) = \ell u$ et $\rho_U(u \otimes 1) = ru$.

Si on se donne Φ, ℓ et r satisfaisant les relations du théorème précédent, alors on construit des applications $\alpha_{U,V,W}(u \otimes (v \otimes w)) = \Phi((u \otimes v) \otimes w)$, $\lambda_U(1 \otimes u) = \ell u$ et $\rho_U(u \otimes 1) = ru$. À l'aide des relations (1) et (2) on prouve que ces applications sont A-linéaires.

Si on se donne Φ, ℓ et r satisfaisant les relations du théorème précédent, alors on construit des applications $\alpha_{U,V,W}(u \otimes (v \otimes w)) = \Phi((u \otimes v) \otimes w)$, $\lambda_U(1 \otimes u) = \ell u$ et $\rho_U(u \otimes 1) = ru$. À l'aide des relations (1) et (2) on prouve que ces applications sont A-linéaires. La relation (3) donne le pentagone, alors que la relation (4) est le triangle.

Si on se donne Φ, ℓ et r satisfaisant les relations du théorème précédent, alors on construit des applications $\alpha_{U,V,W}(u \otimes (v \otimes w)) = \Phi((u \otimes v) \otimes w)$, $\lambda_U(1 \otimes u) = \ell u$ et $\rho_U(u \otimes 1) = ru$. À l'aide des relations (1) et (2) on prouve que ces applications sont A-linéaires. La relation (3) donne le pentagone, alors que la relation (4) est le triangle.
Inversement supposons que la catégorie des A-modules à gauche soit monoïdale avec $\alpha_{U,V,W}$, λ_U et ρ_U donnés.

Si on se donne Φ, ℓ et r satisfaisant les relations du théorème précédent, alors on construit des applications $\alpha_{U,V,W}(u \otimes (v \otimes w)) = \Phi((u \otimes v) \otimes w)$, $\lambda_U(1 \otimes u) = \ell u$ et $\rho_U(u \otimes 1) = ru$. À l'aide des relations (1) et (2) on prouve que ces applications sont A-linéaires. La relation (3) donne le pentagone, alors que la relation (4) est le triangle.
Inversement supposons que la catégorie des A-modules à gauche soit monoïdale avec $\alpha_{U,V,W}$, λ_U et ρ_U donnés. On définit l'associateur par $\Phi := \alpha_{A,A,A}(1 \otimes 1 \otimes 1)$, $\ell := \lambda_A(1 \otimes 1)$ et $r := \rho_A(1 \otimes 1)$.

Si on se donne Φ, ℓ et r satisfaisant les relations du théorème précédent, alors on construit des applications $\alpha_{U,V,W}(u \otimes (v \otimes w)) = \Phi((u \otimes v) \otimes w)$, $\lambda_U(1 \otimes u) = \ell u$ et $\rho_U(u \otimes 1) = ru$. À l'aide des relations (1) et (2) on prouve que ces applications sont A-linéaires. La relation (3) donne le pentagone, alors que la relation (4) est le triangle.
Inversement supposons que la catégorie des A-modules à gauche soit monoïdale avec $\alpha_{U,V,W}$, λ_U et ρ_U donnés. On définit l'associateur par $\Phi := \alpha_{A,A,A}(1 \otimes 1 \otimes 1)$, $\ell := \lambda_A(1 \otimes 1)$ et $r := \rho_A(1 \otimes 1)$.
Une bigèbre est une quasi-bigèbre avec $\Phi = 1 \otimes 1 \otimes 1$, $\ell = 1$ et $r = 1$.

Exemple (Kassel)

Soit G un groupe fini, et $\omega\colon G \times G \times G \to \mathbb{K} \setminus \{0\}$ un 3-cocyle normalisé

Exemple (Kassel)

Soit G un groupe fini, et $\omega\colon G \times G \times G \to \mathbb{K} \setminus \{0\}$ un 3-cocyle normalisé, *i.e.*,

1. $\omega(x, y, z)\omega(tx, y, z)^{-1}\omega(t, xy, z)\omega(t, x, yz)^{-1}\omega(t, x, y) = 1$ pour tous $t, x, y, z \in G$;

Exemple (Kassel)

Soit G un groupe fini, et $\omega\colon G \times G \times G \to \mathbb{K} \setminus \{0\}$ un 3-cocycle normalisé, *i.e.*,

1. $\omega(x,y,z)\omega(tx,y,z)^{-1}\omega(t,xy,z)\omega(t,x,yz)^{-1}\omega(t,x,y) = 1$ pour tous $t,x,y,z \in G$;
2. $\omega(x,y,z) = 1$ dès lors que x, y ou $z = 1$.

Exemple (Kassel)

Soit G un groupe fini, et $\omega\colon G \times G \times G \to \mathbb{K} \setminus \{0\}$ un 3-cocyle normalisé, *i.e.*,

1. $\omega(x,y,z)\omega(tx,y,z)^{-1}\omega(t,xy,z)\omega(t,x,yz)^{-1}\omega(t,x,y) = 1$ pour tous $t,x,y,z \in G$;
2. $\omega(x,y,z) = 1$ dès lors que x, y ou $z = 1$.

Soit $\mathbb{K}G \times G$ l'espace vectoriel de base $G \times G$.

Exemple (Kassel)

Soit G un groupe fini, et $\omega\colon G \times G \times G \to \mathbb{K} \setminus \{0\}$ un 3-cocyle normalisé, *i.e.*,

1. $\omega(x, y, z)\omega(tx, y, z)^{-1}\omega(t, xy, z)\omega(t, x, yz)^{-1}\omega(t, x, y) = 1$ pour tous $t, x, y, z \in G$;
2. $\omega(x, y, z) = 1$ dès lors que x, y ou $z = 1$.

Soit $\mathbb{K}G \times G$ l'espace vectoriel de base $G \times G$. On définit un produit associatif sur cet espace par $(g, x)(h, y) = \delta_{g,xhx^{-1}}\theta(g, x, y)(g, xy)$

Exemple (Kassel)

Soit G un groupe fini, et $\omega\colon G \times G \times G \to \mathbb{K} \setminus \{0\}$ un 3-cocyle normalisé, *i.e.*,

1. $\omega(x, y, z)\omega(tx, y, z)^{-1}\omega(t, xy, z)\omega(t, x, yz)^{-1}\omega(t, x, y) = 1$ pour tous $t, x, y, z \in G$;
2. $\omega(x, y, z) = 1$ dès lors que x, y ou $z = 1$.

Soit $\mathbb{K}G \times G$ l'espace vectoriel de base $G \times G$. On définit un produit associatif sur cet espace par $(g, x)(h, y) = \delta_{g,xhx^{-1}}\theta(g, x, y)(g, xy)$ où l'on a posé $\theta(g, x, y) = \omega(g, x, y)\omega(x, y, (xy)^{-1}gxy)\omega(x, x^{-1}gx, y)^{-1}$.

Exemple (Kassel)

Soit G un groupe fini, et $\omega\colon G \times G \times G \to \mathbb{K} \setminus \{0\}$ un 3-cocyle normalisé, *i.e.*,

1. $\omega(x, y, z)\omega(tx, y, z)^{-1}\omega(t, xy, z)\omega(t, x, yz)^{-1}\omega(t, x, y) = 1$ pour tous $t, x, y, z \in G$;
2. $\omega(x, y, z) = 1$ dès lors que x, y ou $z = 1$.

Soit $\mathbb{K}G \times G$ l'espace vectoriel de base $G \times G$. On définit un produit associatif sur cet espace par $(g, x)(h, y) = \delta_{g,xhx^{-1}}\theta(g, x, y)(g, xy)$ où l'on a posé $\theta(g, x, y) = \omega(g, x, y)\omega(x, y, (xy)^{-1}gxy)\omega(x, x^{-1}gx, y)^{-1}$. L'élément $\displaystyle\sum_{g \in G}(g, 1)$ est l'identité pour ce produit.

Exemple (Kassel)

Soit G un groupe fini, et $\omega\colon G \times G \times G \to \mathbb{K} \setminus \{0\}$ un 3-cocyle normalisé, *i.e.*,

1. $\omega(x, y, z)\omega(tx, y, z)^{-1}\omega(t, xy, z)\omega(t, x, yz)^{-1}\omega(t, x, y) = 1$ pour tous $t, x, y, z \in G$;
2. $\omega(x, y, z) = 1$ dès lors que x, y ou $z = 1$.

Soit $\mathbb{K}G \times G$ l'espace vectoriel de base $G \times G$. On définit un produit associatif sur cet espace par $(g, x)(h, y) = \delta_{g,xhx^{-1}}\theta(g, x, y)(g, xy)$ où l'on a posé $\theta(g, x, y) = \omega(g, x, y)\omega(x, y, (xy)^{-1}gxy)\omega(x, x^{-1}gx, y)^{-1}$.
L'élément $\sum_{g \in G}(g, 1)$ est l'identité pour ce produit. L'algèbre est notée $D^{\omega}(G)$.

Exemple (Kassel (suite))

On définit deux morphismes d'algèbres :

Exemple (Kassel (suite))

On définit deux morphismes d'algèbres : $\Delta\colon D^{\omega}(G) \to D^{\omega}(G) \otimes D^{\omega}(G)$ et $\epsilon\colon D^{\omega}(G) \to \mathbb{K}$

Exemple (Kassel (suite))

On définit deux morphismes d'algèbres : $\Delta\colon D^{\omega}(G) \to D^{\omega}(G) \otimes D^{\omega}(G)$ et $\epsilon\colon D^{\omega}(G) \to \mathbb{K}$ par $\Delta(g, x) = \sum_{uv=g} \gamma(x, u, v)(u, x) \otimes (v, x)$ et $\epsilon(g, x) = \delta_{g,1}$

Exemple (Kassel (suite))

On définit deux morphismes d'algèbres : $\Delta\colon D^\omega(G) \to D^\omega(G) \otimes D^\omega(G)$ et $\epsilon\colon D^\omega(G) \to \mathbb{K}$ par $\Delta(g, x) = \sum_{uv=g} \gamma(x, u, v)(u, x) \otimes (v, x)$ et $\epsilon(g, x) = \delta_{g,1}$ avec $\gamma(x, u, v) = \omega(u, v, x)\omega(x, x^{-1}ux, x^{-1}vx)\omega(u, x, x^{-1}vx)^{-1}$.

Exemple (Kassel (suite))

On définit deux morphismes d'algèbres : $\Delta\colon D^{\omega}(G) \rightarrow D^{\omega}(G) \otimes D^{\omega}(G)$ et $\epsilon\colon D^{\omega}(G) \rightarrow \mathbb{K}$ par $\Delta(g, x) = \sum_{uv=g} \gamma(x, u, v)(u, x) \otimes (v, x)$ et $\epsilon(g, x) = \delta_{g,1}$ avec $\gamma(x, u, v) = \omega(u, v, x)\omega(x, x^{-1}ux, x^{-1}vx)\omega(u, x, x^{-1}vx)^{-1}$. Enfin si on pose $\Phi = \sum_{x,y,z\in G} \omega(x, y, z)^{-1} x \otimes y \otimes z$

Exemple (Kassel (suite))

On définit deux morphismes d'algèbres : $\Delta\colon D^{\omega}(G) \to D^{\omega}(G) \otimes D^{\omega}(G)$ et $\epsilon\colon D^{\omega}(G) \to \mathbb{K}$ par $\Delta(g, x) = \sum_{uv=g} \gamma(x, u, v)(u, x) \otimes (v, x)$ et $\epsilon(g, x) = \delta_{g,1}$ avec $\gamma(x, u, v) = \omega(u, v, x)\omega(x, x^{-1}ux, x^{-1}vx)\omega(u, x, x^{-1}vx)^{-1}$. Enfin si on pose $\Phi = \sum_{x,y,z \in G} \omega(x, y, z)^{-1} x \otimes y \otimes z$ où l'on a identifié x et $(x, 1)$,

Exemple (Kassel (suite))

On définit deux morphismes d'algèbres : $\Delta\colon D^{\omega}(G) \to D^{\omega}(G) \otimes D^{\omega}(G)$ et $\epsilon\colon D^{\omega}(G) \to \mathbb{K}$ par $\Delta(g,x) = \sum_{uv=g} \gamma(x,u,v)(u,x) \otimes (v,x)$ et $\epsilon(g,x) = \delta_{g,1}$ avec $\gamma(x,u,v) = \omega(u,v,x)\omega(x,x^{-1}ux,x^{-1}vx)\omega(u,x,x^{-1}vx)^{-1}$. Enfin si on pose $\Phi = \sum_{x,y,z\in G} \omega(x,y,z)^{-1} x \otimes y \otimes z$ où l'on a identifié x et $(x,1)$, alors la donnée $(D^{\omega}(G), \Delta, \epsilon, \Phi, 1, 1)$ est une quasi-bigèbre.