Critère de positivité de Li et l'hypothèse de Riemann

Kamel Mazhouda
Faculté des sciences de Monatir, Tunisie

LIPN (Université Paris 13), 17 décembre 2009

Table des matières

0.1 La fonction zêta de Riemann

0.1.1 Définition

Définition 1 *On appelle fonction zêta, la fonction définie sur le demi-plan $\{s \in \mathbb{C}$ tel que $Re(s) > 1\}$ par*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Rappelons que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log^\beta n}{n^\alpha}$ converge pour tout $\alpha > 1$ et $\beta \geq 0$, alors

1. La fonction zêta restreinte à $]1, +\infty[$ est une fonction de classe C^∞ et sa dérivée k^{me} est donnée par

$$\zeta^{(k)}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k \log^k n}{n^s}.$$

   En outre, pour tout entier $k \geq 0$, la convergence de la série est normale sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ avec $a > 1$.

2. Plus généralement, la fonction zêta de Riemann est une fonction holomorphe sur le demi-plan $\{s \in \mathbb{C}$ tel que $Re(s) > 1\}$.

3. $\zeta(s)$ tend vers $+\infty$ lorsque s tend vers 1^+ dans $\mathbb{R}$.

0.1.2 Produit eulérien

Proposition 1 *Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers de $\mathbb{N}$ et s un nombre complexe tel que $Re(s) > 1$. Le produit $\prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1-p^{-s}}$ converge uniformément sur tout demi-plan de la forme $\{s \in \mathbb{C}$ tel que $Re(s) \geq a\}$ avec $a > 1$ et*

$$\forall s \in \mathbb{C} \text{ tel que } Re(s) > 1, \quad \zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

Alors,

1. $\zeta(s) \neq 0$ pour tout s tel que $Re(s) > 1$.

2. On a le développement asymptotique suivant

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p^s} = -\log(s-1) + A + o(1), \quad s \in \mathbb{R}, \; s \to 1^+,$$

   où A est une certaine constante réelle. En particulier, la série $\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p}$ diverge.

0.1.3 Équation fonctionnelle

La fonction zêta de Riemann vérifie l'équation fonctionnelle suivante :

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma((1-s)/2)\zeta(1-s).$$

En effet, pour $Re(z) > 1$, on a

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} u^{z-1} e^{-u} du.$$

En posant $u = \pi n^2 x$, on obtient

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\frac{1}{n^s} = \int_0^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 x} dx.$$

Alors,

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1}e^{-\pi n^2 x}dx.$$

Le premier membre est défini pour $Re(s) > 1$. Dans le second membre, on permute $\sum$ et $\int$ grâce à la convergence. On en déduit,

$$\begin{aligned}\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) &= \int_0^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}\right)dx \\ &= \left\{\int_0^1 + \int_1^{+\infty}\right\} x^{\frac{s}{2}-1}\omega(x)dx,\end{aligned}$$

où $\omega(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x} = \frac{1}{2}(\theta(x)-1)$ et $\theta(x)$ est la fonction thêta. la fonction thêta vérifie l'équation fonctionnelle

$$\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\theta(1/x).$$

Par conséquent,

$$\omega(1/x) = \frac{1}{2}(\theta(1/x)-1) = \sqrt{x}\omega(x) + \frac{1}{2}(\sqrt{x}-1).$$

Avec le changement $x \longmapsto 1/x$, la première intégrale devient

$$\int_1^{+\infty} x^{-\frac{s}{2}-1}\omega(1/x)dx = \int_1^{+\infty} x^{-\frac{s+1}{2}}\omega(x)dx + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s}.$$

Par suite, on obtient

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{+\infty}\left(x^{-\frac{s+1}{2}} + x^{\frac{s}{2}-1}\right)\omega(x)dx.$$

Grâce à l'estimation $\omega(x) \ll e^{-\pi x}$, l'intégrale dans le second membre de l'égalité précédente converge pour tout s et par suite l'égalité est vraie pour tout $s \in \mathbb{C}$. Ainsi la démonstration s'achève en remarquant que le second membre est invariant par l'application $s \longmapsto 1-s$. □

0.1.4 Prolongement analytique

Proposition 2 *Pour $Re(s) > 0$, on a*

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} + s\int_1^{+\infty}\frac{[u]-u}{u^{s+1}}du.$$

Démonstration. Soient N, M deux entiers naturels tels que $N < M$ et s un nombre complexe tel que $Re(s) > 1$. En utilisant la formule de sommation par partie (due à d'Abel) avec $F(u) = u^{-s}$, $\alpha_n = 1$ et $\lambda_n = n$, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{N<n\leq M}\frac{1}{n^s} &= M^{1-s} - N^{1-s} + s\int_N^M \frac{[u]}{u^{s+1}}du \\ &= M^{1-s} - N^{1-s} + s\int_N^M \frac{[u]-u}{u^{s+1}}du + s\int_N^M \frac{u}{u^{s+1}}du \\ &= \frac{1}{s-1}\left(M^{1-s} - N^{1-s}\right) + s\int_N^M \frac{[u]-u}{u^{s+1}}du.\end{aligned}$$

Pour $M \to \infty$, on a

$$\zeta(s) = \sum_{n\leq N}\frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} + \int_N^{+\infty}\frac{[u]-u}{u^{s+1}}du.$$

On a $-1 < [u]-u \leq 0$, alors l'intégrale existe pour tout s tel que $Re(s) > 0$ (et tout N). □

Corollaire 1 *La fonction zêta de Riemann admet un prolongement analytique dans* $\{s \in \mathbb{C}$ *tel que* $Re(s) > 0\}$ *sauf pour un pôle simple en* $s = 1$ *de résidu 1.*

Grâce à l'équation fonctionnelle, la fonction zêta de Riemann se prolonge sur tout $\mathbb{C}$.

0.1.5 Hypothèse de Riemann

Considérons la fonction complétée ξ de la fonction zêta de Riemann définie par

$$\xi(s) := s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s).$$

D'abord, notons que les zéros triviaux de $\xi(s)$ sont tous des entiers pairs négatifs, qui sont annulés par les pôles simples correspondants de la fonction Γ. Ainsi, $\xi(s)$ a seulement des zéros non-triviaux se trouvent tous dans la bande critique $0 \leq Re(s) \leq 1$ et admet un développement en produit de Weierstraß, connu sous le nom produit de Hadamard :

$$\xi(s) = \xi(0)\prod_{\rho}\left(1 - \frac{s}{\rho}\right),$$

où $\xi(0) = 1/2$ et où ρ parcourt les zéros non triviaux de $\zeta(s)$.
De plus, la fonction ξ vérifie l'équation fonctionnelle simple :

$$\xi(s) = \xi(1-s).$$

Par conséquent, la symétrie par rapport à la ligne critique $Re(s) = 1/2$ devient triviale. Alors, les zéros sont non seulement symétriques par rapport à l'axe réel, ils sont aussi symétriques par rapport à la ligne critique. L'hypothèse de Riemann postule que tous les zéros sont en fait sur la ligne critique $Re(s) = 1/2$.

Ces zéros sont en nombre infini et vérifient une formule de type Riemann-Von Mangoldt.

$$\begin{aligned} N(T) &= \{\rho :\ \zeta(\rho) = 0;\ \rho = \beta + i\gamma,\ 0 \leq \beta \leq 1 \text{ et } |\gamma| \leq T\} \\ &= \frac{1}{2\pi} T \log T + \frac{1}{2\pi}\log(2\pi e)T + \frac{7}{8} + O(\log T). \end{aligned}$$

0.2 Critère de Li

0.2.1 Critère de Li

Considérons la fonction

$$\phi(z) := \xi\left(\frac{z}{1-z}\right) = \xi\left(\frac{1}{1-z}\right).$$

La deuxième égalité est vraie grâce à l'équation fonctionnelle ci-dessus. Notons de plus que l'application conforme $z \longmapsto \frac{z}{z-1}$ envoie l'ensemble $\{z | 0 < Re(z) < \frac{1}{2}\}$ à l'intérieur du disque unité ouvert $|z| < 1$. Alors

Proposition 3 *L'hypothèse de Riemann est vraie si et seulement si la fonction* $\frac{\phi'(z)}{\phi(z)}$ *est analytique.*

Soit $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres définie par

$$\lambda_n := \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^n}{dz^n}\left[z^{n-1}\log\xi(z)\right]_{z=1},$$

alors on a le théorème suivant (due à Xian-Jin Li, *The positivity of a sequence of numbers and the Riemann hypothesis,* J. Number theory **65** (2) (1997) 325–333).

Théorème 1 (Critère de Li) *L'hypothèse de Riemann est vraie si et seulement si* $\lambda_n \geq 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Li montre aussi que les coefficients λ_n peuvent être définis de deux manières équivalentes :

$$\frac{\phi'(z)}{\phi(z)} = \sum_{n\geq 0} \lambda_{n+1} z^n, \tag{1}$$

$$\lambda_n = \sum_{\rho} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{\rho} \right)^n \right], \tag{2}$$

où

$$\phi(z) := \xi \left(\frac{1}{1-z} \right) := 1 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^j. \tag{3}$$

Par conséquent, l'équation (1) implique que λ_n sont les coefficients dans le développement de Taylor de la fonction $\left(\log \xi \left(\frac{1}{1-z}\right)\right)$. Li calcule explicitement les coefficients a_j apparaissant dans l'équation (3),

$$a_j = 4 \sum_{p=1}^{j} \binom{j-1}{j-p} \frac{1}{p!} \int_p^{\infty} \left[x^{3/2} \omega'(x) \right]' \left(\frac{1}{2} \log x \right)^p \left(1 + (-1)^p x^{-1/2} \right) dx,$$

où $\omega(x) := \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}$. Ceci implique que les a_j sont des réels positifs. De l'égalité

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^n = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{j+1} z^j \right),$$

on obtient la relation de récurrence suivante

$$\lambda_n = n a_n - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j a_{n-j}.$$

Si les λ_n sont positifs alors la relation de récurrence ci-dessus implique que $\lambda_n \leq n a_n$ pour tout $n = 1, 2, ..$, par suite pour tout z dans le disque unité,

$$\left| \frac{\phi'(z)}{\phi(z)} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n z^{n-1}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} n a_n |z|^{n-1} = \phi'(|z|) < \infty.$$

Par conséquent, la fonction $\frac{\phi'(z)}{\phi(z)}$ est analytique dans le disque unité et grâce à la proposition 3, l'hypothèse de Riemann est vraie. Inversement, si l'hypothèse de Riemann est vraie, alors pour la j-ième paire de zéros non triviaux conjugués vérifie

$$\left| 1 - \frac{1}{\rho} \right| = \left| 1 - \frac{1}{\frac{1}{2} \pm i\gamma_j} \right| = 1,$$

et donc la somme dans l'équation (2) converge. De plus, en écrivant

$$1 - \frac{1}{\frac{1}{2} \pm i\gamma_j} := e^{\pm i\theta_j},$$

on en déduit que

$$\lambda_n = \sum_{j=1}^{\infty} ((1 - e^{in\theta_j}) + (1 - e^{-i\theta_j})) = 2 \sum_{j=1}^{\infty} (1 - \cos(n\theta_j)) \geq 0.$$

Ainsi la démonstration du théorème 2.2.1 s'achève. $\square$

0.2.2 Formule arithmétique de coefficients de Li

Théorème 2 *Pour tout $n \geq 1$, on a*

$$\begin{aligned}\lambda_n &= 1 - (\log 4\pi + \gamma)\frac{n}{2} - \sum_{k=2}^{n} \tbinom{n}{k}(-1)^k (1 - 2^{-k})\zeta(k) \\ &- \sum_{l=1}^{n} \tbinom{n}{l} \frac{(-1)^{l-1}}{(l-1)!} \lim_{X \longrightarrow +\infty} \left\{ \sum_{k \leq X} \frac{\Lambda(k)}{k} (\log k)^{l-1} - \frac{1}{l}(\log X)^l \right\}.\end{aligned}$$

Démonstration. On a

$$\frac{d}{dz} \log \xi \left(\frac{z}{z-1} \right) = -\frac{1}{(z-1)^2} \frac{\xi'}{\xi} \left(\frac{z}{z-1} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_{n+1} z^n.$$

Écrivons

$$\frac{\xi'}{\xi}(s+1) = \frac{\zeta'}{\zeta}(s+1) + \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} - \frac{1}{2}\log \pi + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s/2). \tag{4}$$

En appliquant le théorème 1 d'Ivic (*On the Laurent coefficients of certain Dirichlet series.* Publ. Inst. Math. **53** (1993) 23-36) avec $f(s) = \zeta(s)$, $A(x) = -\psi(x) = -\sum_{n \leq x} \Lambda(n)$ et $u(x) = x - \psi(x)$, on obtient

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s+1) - \frac{1}{s} = \sum_{k=0}^{+\infty} \eta_F(k) s^k, \tag{5}$$

où $\eta_F(k)$ sont les constantes de Stieltjes définient par

$$\eta(k) = \frac{(-1)^k}{k!} \lim_{X \longrightarrow +\infty} \left\{ \sum_{n \leq X} \frac{\Lambda(n)}{n} (\log n)^k - \frac{1}{k+1} (\log X)^{k+1} \right\}.$$

Définissons les coefficients $\tau(k)$ par

$$-\frac{1}{2}\log \pi + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s/2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \tau_F(k) s^k.$$

Á partir des égalitées précédentes, on trouve

$$\lambda_n = 1 - \sum_{k=1}^{n} \tbinom{n}{k} \eta(k-1) - \sum_{k=1}^{n} \tbinom{n}{k} \tau(k-1), \qquad \forall\ n \geq 1. \tag{6}$$

On a

$$\tau(0) = -\frac{1}{2}\log \pi + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}(1/2) = -\frac{1}{2}\log \pi - \frac{1}{2}\gamma - \log 2,$$

où γ est la constante d'Euler et pour tout $k \geq 1$

$$\tau(k) = (-1)^{k+1} \sum_{l=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2l+1} \right)^{k+1},$$

et ceci en utilisant l'expression

$$\psi(z) = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{z}{l(l+z)}.$$

Avec l'égalité

$$(-1)^k \sum_{l=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2l+1} \right)^k = (-1)^k \left(1 - \frac{1}{2^k} \right) \zeta(k),$$

on obtient la formule voulue. $\square$

Le théorème 2 peut être retrouvé en utilisant les formules explicites de Weil (voir le papier de Bombieri et Lagarias : *Complements to Li's criterion for the Riemann hypothesis,* J. Number Theory **77** (2) (1999) 274–287).

Une formule asymptotique équivalente à l'hypothèse de Riemann est donnée dans le théorème suivant.

Théorème 3

$$RH \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_n = \frac{1}{2} n \log n + cn + O(\sqrt{n} \log n),$$

où $c = \frac{1}{2}(\gamma - 1 - \log(\pi/2))$.

Ceci est un cas particulier d'un théorème établit pour une large classe de séries de Dirichlet (donnée dans la section suivante) par Sami Omar et Kamel Mazhouda dans (*The Li criterion and the Riemann hypothesis for the Selberg class II*, J. Number Theory in press (2010)).

0.3 La classe de Selberg

En 1989, Selberg a défini une classe de séries de Dirichlet admettant un produit eulérien, un prolongement analytique et une équation fonctionnelle de type Riemann, et a formulé quelques conjectures fondamentales concernant ces séries. Depuis cette date, cette classe porte son nom et devient un important objet de recherche.

Définition 2 *Une fonction F d'une variable complexe appartient à la classe de Selberg $\mathcal{S}$ si elle satisfait les conditions suivantes :*

- **Série de Dirichlet**. *Pour $\sigma > 1$, F(s) prend la forme*

$$F(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a(n)}{n^s},$$

  où $a(1) = 1$, de plus elle est absolument convergente.

- **Prolongement analytique**. *Il existe un entier $m \geq 0$ tel que $(s-1)^m F(s)$ ait un prolongement en une fonction entière d'ordre fini.*

- **Équation fonctionnelle**. *Il existe des réels $Q > 0$, $\lambda_j > 0$ et pour $1 \leq j \leq r$, des complexes μ_j avec $Re(\mu_j) \geq 0$ tels que la fonction*

$$\phi(s) = Q^s \left(\prod_{j=1}^{r} \Gamma(\lambda_j s + \mu_j) \right) F(s) = \gamma(s) F(s)$$

  vérifie l'équation fonctionnelle

$$\phi(s) = \omega \overline{\phi}(1-s),$$

  où $\omega \in \mathbb{C}$, $|\omega| = 1$ et $\overline{\phi}(s) = \overline{\phi(\overline{s})}$.

- **Produit eulérien**. *Pour σ assez grand,*

$$\log F(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b(n)}{n^s},$$

  où $b(n) = 0$ si n n'est pas une puissance d'un nombre premier et $b(n) \ll n^{\theta}$ pour un certain $\theta < \frac{1}{2}$.

- **Hypothèse de Ramanujan**. *Pour tout $\epsilon > 0$ fixé, on a* $a(n) = O(n^{\epsilon})$ *quand n est assez grand.*

On appellera classe de Selberg étendue et on notera $\mathcal{S}^{\#}$ l'ensemble des fonctions vérifiant les trois premiers axiomes.

Définition 3 *Les nombres* $\gamma_F,\ Q,\ \lambda_j,\ \mu_j$ *et ω définis ci-dessus sont appelés paramètres de F .*

Définition 4 *Pour toute fonction F de la classe de Selberg étendue $S^{\#}$, on définit le degré de F par*

$$d = d_F = 2\sum_{j=1}^{r}\lambda_j,$$

ainsi que le $\gamma-$facteur de F qui est donné par

$$\gamma(s) = Q^s\prod_{j=1}^{r}\Gamma(\lambda_j s + \mu_j).$$

Le facteur $\Gamma(\lambda_j s+\mu_j)$ est appelé Γ-facteur de $\gamma(s)$. De plus, l'ordre polaire de F est le plus petit entier naturel m tel que $(s-1)^m F(s)$ soit entière d'ordre fini. Il est noté m_F.

Notation. On note $\mathcal{S}_d$ (resp. $\mathcal{S}_d^{\#}$) l'ensemble des fonctions qui sont dans $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{S}^{\#}$) et de degré d donné.
Exemple 2. La fonction L de Dirichlet est définie pour $\sigma > 0$ par:

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_p(1-\frac{\chi(p)}{p^s})^{-1}$$

où χ est un caractère primitif de Dirichlet (*modulo* q). Elle vérifie l'équation fonctionnelle

$$\phi(s,\chi) = \frac{\tau(\chi)}{i^a\sqrt{q}}\phi(1-s,\overline{\chi}),$$

avec

$$\phi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2}+a)L(s,\chi),$$

et

$$\begin{cases} a = 0 & \text{si} \quad \chi(-1) = 1 \\ a = 1 & \text{si} \quad \chi(-1) = -1. \end{cases}$$

L'hypothèse de Ramanujan implique que les séries de Dirichlet convergent absolument dans le demi-plan $\sigma > 1$, et uniformément dans tout sous- ensemble compact. Alors les éléments de la classe de selberg $\mathcal{S}$ sont analytiques dans $\sigma > 1$. La condition sur le produit eulérien implique que les coefficients $a_F(n)$ sont multiplicatifs, et que chaque facteur d'Euler est une série de Dirichlet

$$F_p(s) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a_F(p^k)}{p^{ks}} = \exp\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{b_F(p^k)}{p^{ks}}\right),$$

absolument convergente pour $\sigma > 0$. De plus les $b_F(p^k)$ sont donnés par la relation de récurrence

$$b_F(p^k) = a_F(p^k) - \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k-1} j\ b_F(p^k)\ a_F(p^{k-j}),$$

où $b_F(p) = a_F(p)$. En regardant la condition sur le produit eulérien, il est clair que tout élément $F(s)$ de la classe de selberg ne s'annule pas dans le demi-plan de la convergence absolue $\sigma > 1$. Ce qui nous permet d'introduire la notion de bande critique et de ligne critique. Les zéros de $F(s)$ provenant de facteur gamma sont appelé les zéros triviaux. Tous sont situé dans $\sigma \leq 0$, et c'est simple de voir qu'ils sont localisé à

$$s = -\frac{k+\mu_j}{\lambda_j},$$

où $n \in \mathbb{N}$ et $1 \leq j \leq r$. Tous les autres zéros sont dites non-triviaux et sont dans la bande critique $0 \leq \sigma \leq 1$. Dans le cas général, on ne peut pas exclure la possibilité que $F(s)$ admet un zéro trivial et non trivial au même point.

Comme pour la fonction zêta de Riemann, on conjecture que les zéros non-triviaux sont de partie réelle 1/2. C'est l'hypothèse de Riemann généralisé.

Pour plus de détaille, voir les papiers de J. Kaczorowski (*Axiomatic theory of L-functions : the Selberg class,* Analytic number theory, Lecture Notes in Math. **1891** (2006) 133–209) et de J. Kaczorowski & A. Perelli, *The Selberg class : a survey*, In Number Theory in Progress, Proc. Conf. in Honor of A. Schinzel, ed. by K. Györy et al., de Gruyter (1999) 953-992).