

Corrélations discrètes d'ordre 2 de certaines suites automatiques

Irène Marcovici
avec Thomas Stoll et Pierre-Adrien Tahay

Institut Élie Cartan de Lorraine, Univ. de Lorraine, Nancy

Séminaire de l'équipe CALIN du LIPN
Mardi 12 janvier 2021



Introduction



Objectif : présenter des familles de suites déterministes très simples algorithmiquement, partageant certaines propriétés avec des suites i.i.d. de symboles.

Introduction



Objectif : présenter des familles de **suites déterministes très simples algorithmiquement**, partageant certaines propriétés avec des suites i.i.d. de symboles.

Plus précisément :

- On considèrera des **suites automatiques** : suites dont les termes peuvent être générés par un automate fini.
- On s'intéressera aux corrélations discrètes d'ordre 2 de ces suites : répartition asymptotique des valeurs (u_n, u_{n+r}) quand n tend vers l'infini, pour chaque r fixé.

Introduction



Objectif : présenter des familles de suites déterministes très simples algorithmiquement, **partageant certaines propriétés avec des suites i.i.d. de symboles.**

Plus précisément :

- On considèrera des suites automatiques : suites dont les termes peuvent être générés par un automate fini.
- On s'intéressera aux corrélations discrètes d'ordre 2 de ces suites : répartition asymptotique des valeurs (u_n, u_{n+r}) quand n tend vers l'infini, pour chaque r fixé.

- 1 Suites automatiques et suites block-additives
- 2 Corrélations discrètes
- 3 Dimension supérieure

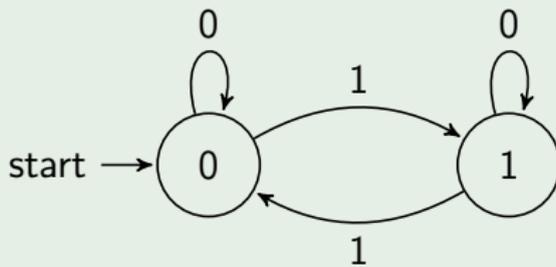
Soit \mathcal{A} un alphabet fini, et $k \geq 1$ un entier.

Définition

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **k -automatique** s'il existe un automate fini tel qu'en entrant les chiffres de n en base k dans l'automate, l'état d'arrivée obtenu permet de déterminer u_n .

Exemple 1 : suite de Prouhet-Thue-Morse

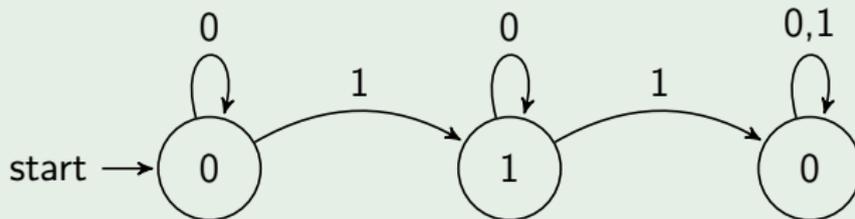
$$u_n = \begin{cases} 0 & \text{si l'écriture binaire de } n \text{ comporte un nombre pair de 1,} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$



Premiers termes : 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0...

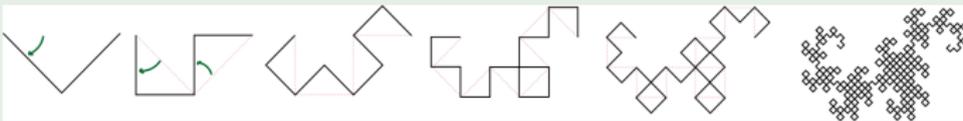
Exemple 2 : puissances de 2

$$u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est une puissance de 2,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



Premiers termes : 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0...

Exemple 3 : suite de pliage de papier

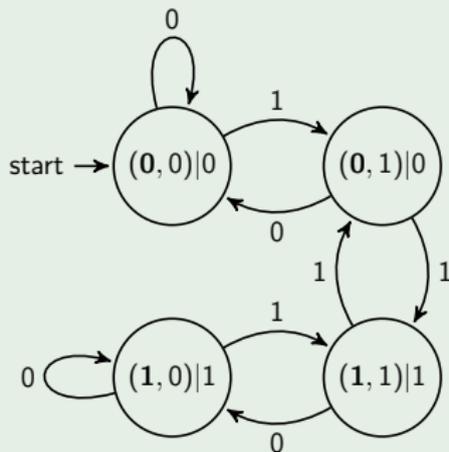


Premiers termes : 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0...

Exemple 4 : suite de Rudin-Shapiro

$$u_n = \begin{cases} 1 & \text{si nb impair de blocs 11 dans la décomp. binaire de } n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple : $[187]_2 = 10111011$, $u_{187} = 1$.



Premiers termes : 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, ...

Définition par morphisme

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **k -automatique** si c'est le point fixe d'un morphisme k -uniforme, ou l'image par une projection lettre à lettre d'un tel point fixe.

Suite de Prouhet-Thue-Morse

$$u_n = \begin{cases} 0 & \text{si l'écriture binaire de } n \text{ comporte un nombre pair de 1,} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Morphisme : $\varphi : 0 \mapsto 01, 1 \mapsto 10$

$$\varphi^1(0) = 01$$

$$\varphi^2(0) = 0110$$

$$\varphi^3(0) = 01101001$$

Premiers termes : 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, ...

Suite de pliage de papier

Morphisme : $\varphi : a \mapsto ab, b \mapsto cb, c \mapsto ad, d \mapsto cd$

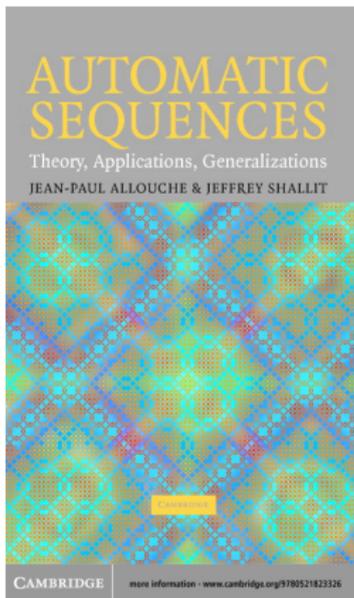
$$\varphi^1(a) = ab$$

$$\varphi^2(a) = abcb$$

$$\varphi^3(a) = abcbadcb$$

Projection : $p(a) = p(b) = 0, p(c) = p(d) = 1$

Premiers termes : $0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, \dots$



Autres caractérisations équivalentes

- La suite u est k -automatique ssi son k -noyau $N_k(u)$ est fini.

$$N_k(u) = \{(u_{k^i n + j})_{n \geq 0} : i \geq 0, 0 \leq j < k^i\}$$

- Si p est premier et $\mathcal{A} = \mathbb{F}_{p^m}$ la suite u est p -automatique ssi la série $u(X) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n$ est algébrique sur \mathbb{F}_{p^m} .

Pour $k \geq 1$ un entier, on note $\Sigma_k = \{0, \dots, k-1\}$.
Soit G un groupe fini abélien (souvent, $G = \mathbb{Z}_k$).

Définition

Soit $f : \Sigma_k \times \Sigma_k \rightarrow G$ telle que $f(0,0) = 0$.

La suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in G^{\mathbb{N}}$ est **block-additive** en base k de **fonction de poids** f si pour $n = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i k^i$, on a

$$u_n = \sum_{i \in \mathbb{N}} f(x_i, x_{i+1}).$$

Pour $k \geq 1$ un entier, on note $\Sigma_k = \{0, \dots, k-1\}$.
Soit G un groupe fini abélien (souvent, $G = \mathbb{Z}_k$).

Définition

Soit $f : \Sigma_k \times \Sigma_k \rightarrow G$ telle que $f(0,0) = 0$.

La suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in G^{\mathbb{N}}$ est **block-additive** en base k de **fonction de poids** f si pour $n = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i k^i$, on a

$$u_n = \sum_{i \in \mathbb{N}} f(x_i, x_{i+1}).$$

- Toute suite block-additive est k -automatique.
- Les suites de Prouhet-Thue-Morse et de Rudin-Shapiro sont block-additives.
- Pour p premier, on dit que la suite block-additive de fonction de poids $f(i,j) \equiv ij \pmod{p}$ est une **suite de Rudin-Shapiro généralisée**.

Plan

- 1 Suites automatiques et suites block-additives
- 2 Corrélations discrètes
- 3 Dimension supérieure

Ann. Fourier, Grenoble
37, 2 (1987), 115-138

UNE NOUVELLE PROPRIÉTÉ DES SUITES DE RUDIN-SHAPIRO

par Martine QUEFFELEC

Introduction.

L'existence d'une transformation ergodique à spectre de Lebesgue, de multiplicité finie, était un problème ouvert, il y a peu de temps encore, alors que l'on savait construire de telles transformations à spectre singulier, de multiplicité m donnée à l'avance. J. Mathew et M. G. Nadkarni [11] construisirent alors, à l'aide d'un produit croisé, une transformation ergodique, dont la partie continue du spectre est de Lebesgue, de multiplicité 2.

La suite de Rudin-Shapiro est une suite à coefficients valant 1 ou -1 , dont la mesure de corrélation se trouve être la mesure de Lebesgue du cercle. A la suite de l'étude spectrale des systèmes dynamiques définis par substitution ou automate, nous avons pu établir cette nouvelle propriété de la suite de Rudin-Shapiro :

THÉORÈME 2. — *La partie continue du spectre de la suite de Rudin-Shapiro est de type Lebesgue de multiplicité 2,*

en désignant plus brièvement par spectre de la suite de Rudin-Shapiro, le spectre du shift, dans le système dynamique uniquement ergodique associé

- *Bounds for the discrete correlation of infinite sequences on k symbols and generalized Rudin-Shapiro sequences.*
E. Grant, J. Shallit et T. Stoll. **Acta Arithmetica 2009.**
- *Discrete correlation of order 2 of generalized Rudin-Shapiro sequences on alphabets of arbitrary size.*
P.A. Tahay. **Uniform Distribution Theory, 2020.**

- *Bounds for the discrete correlation of infinite sequences on k symbols and generalized Rudin-Shapiro sequences.*
E. Grant, J. Shallit et T. Stoll. **Acta Arithmetica 2009.**
- *Discrete correlation of order 2 of generalized Rudin-Shapiro sequences on alphabets of arbitrary size.*
P.A. Tahay. **Uniform Distribution Theory, 2020.**

Pour les suites de Rudin-Shapiro généralisées, pour tout $r \geq 1$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{card} \left\{ n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket : u_n = u_{n+r} \right\} = \frac{1}{p}.$$

- *Bounds for the discrete correlation of infinite sequences on k symbols and generalized Rudin-Shapiro sequences.*
E. Grant, J. Shallit et T. Stoll. **Acta Arithmetica 2009.**
- *Discrete correlation of order 2 of generalized Rudin-Shapiro sequences on alphabets of arbitrary size.*
P.A. Tahay. **Uniform Distribution Theory, 2020.**

Pour les suites de Rudin-Shapiro généralisées, pour tout $r \geq 1$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{card} \left\{ n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket : u_n = u_{n+r} \right\} = \frac{1}{p}.$$

Technique : estimées de sommes d'exponentielles.

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{u=0}^{p^k-1-i} e\left(\frac{f(u)}{p}\right) \sum_{0 \leq n < N} e\left(\frac{1}{p}(b(n+M) - b(n))\right) e\left(\frac{f_1(n)}{p}\right) \\
 &+ \sum_{u=p^k-i}^{p^k-1} e\left(\frac{f(u)}{p}\right) \sum_{0 \leq n < N} e\left(\frac{1}{p}(b(n+M+1) - b(n))\right) e\left(\frac{f_2(n)}{p}\right)
 \end{aligned}$$

with

$$f_1(n) = g^*(u+i, n+M) - g^*(u, n) \quad \text{for } 0 \leq u \leq p^k - 1 - i,$$

and

$$f_2(n) = g^*(u+i-p^k, n+M+1) - g^*(u, n) \quad \text{for } p^k - i \leq u \leq p^k - 1.$$

For the sake of simplicity, here and later on, we do not write down the dependency on u of these functions. Thus

$$\begin{aligned}
 &\left| \sum_{u=0}^{p^k-1} e\left(\frac{f(u)}{p}\right) \sum_{0 \leq n < N} e\left(\frac{1}{p}(b(p^k n + u + p^k M + i) - b(p^k n + u))\right) \right| \leq \\
 &\left| \sum_{u=0}^{p^k-1-i} e\left(\frac{f(u)}{p}\right) \gamma_N(M, f_1) \right| + \left| \sum_{u=p^k-i}^{p^k-1} e\left(\frac{f(u)}{p}\right) \gamma_N(M+1, f_2) \right|.
 \end{aligned}$$

Let \tilde{f}_1 and \tilde{f}_2 be two functions such that

$$|\gamma_N(M, \tilde{f}_1)| = \max_{0 \leq u \leq p^k - 1 - i} |\gamma_N(M, f_1)|$$

and

$$|\gamma_N(M+1, \tilde{f}_2)| = \max_{p^k - i \leq u \leq p^k - 1} |\gamma_N(M+1, f_2)|$$

1. ...pourquoi ça marche ?

Condition de différence : si $i \neq j$, alors pour tout $g \in G$,

$$\text{card} \left\{ h \in \Sigma_k : f(i, h) - f(j, h) = g \right\} = \frac{k}{|G|}.$$

1. ...pourquoi ça marche ?

Condition de différence : si $i \neq j$, alors pour tout $g \in G$,

$$\text{card} \left\{ h \in \Sigma_k : f(i, h) - f(j, h) = g \right\} = \frac{k}{|G|}.$$

Autrement dit, la matrice de poids est une **matrice de différence** : quand on regarde la différence entre 2 lignes, chaque valeur apparaît le même nombre de fois.

Exemple : suite de Rudin-Shapiro généralisée avec $p = 3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $k = p^n$, on peut facilement construire au moins une matrice de différence de taille k à valeurs dans \mathbb{Z}_k .

Si $k \geq 4$ est un entier pair, ce n'est pas possible...

Mais il existe d'autres exemples de matrices de différence !

$$\begin{pmatrix} (0,0) & (0,0) & (0,0) & (0,0) \\ (0,0) & (0,1) & (1,0) & (1,1) \\ (0,0) & (1,0) & (1,1) & (0,1) \\ (0,0) & (1,1) & (0,1) & (1,0) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Mais il existe d'autres exemples de matrices de différence !

$$\begin{pmatrix} (0,0) & (0,0) & (0,0) & (0,0) \\ (0,0) & (0,1) & (1,0) & (1,1) \\ (0,0) & (1,0) & (1,1) & (0,1) \\ (0,0) & (1,1) & (0,1) & (1,0) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La classification des matrices de différences est un problème difficile.

- *Orthogonal arrays. Springer Series in Statistics.*
A. S. Hedayat, N. J. A. Sloane, J. Stufken. **Springer-Verlag, 1999.**
- *Classification of difference matrices and complex Hadamard matrices.*
P. H. J. Lampio. **PhD thesis, Aalto University, 2015.**

2. Expérimentalement, on observe un résultat plus fort...

Pour tout $(i, j) \in G^2$, pour tout $r \geq 1$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{card} \left\{ n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket : (u_n, u_{n+r}) = (i, j) \right\} = \frac{1}{|G|^2}.$$

2. Expérimentalement, on observe un résultat plus fort...

Pour tout $(i, j) \in G^2$, pour tout $r \geq 1$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{card} \left\{ n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket : (u_n, u_{n+r}) = (i, j) \right\} = \frac{1}{|G|^2}.$$

Exemple : suite de Rudin-Shapiro généralisée avec $p = 3$

0 0 0 0 1 2 0 2 1 0 0 0 1 2 0 2 1 0 0 0 0 2 0 1 1 0 2 0 0 0 0 1 2 0 2
 1 1 1 1 2 0 1 0 2 1 2 2 2 1 2 0 0 2 1 0 0 0 0 1 2...

2. Expérimentalement, on observe un résultat plus fort...

Pour tout $(i, j) \in G^2$, pour tout $r \geq 1$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{card} \left\{ n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket : (u_n, u_{n+r}) = (i, j) \right\} = \frac{1}{|G|^2}.$$

Exemple : suite de Rudin-Shapiro généralisée avec $p = 3$

0 0 0 0 1 2 0 2 1 0 0 0 1 2 0 2 1 0 0 0 0 2 0 1 1 0 2 0 0 0 0 1 2 0 2
 1 1 1 1 2 0 1 0 2 1 2 2 2 1 2 0 0 2 1 0 0 0 0 1 2...

2. Expérimentalement, on observe un résultat plus fort...

Pour tout $(i, j) \in G^2$, pour tout $r \geq 1$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{card} \left\{ n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket : (u_n, u_{n+r}) = (i, j) \right\} = \frac{1}{|G|^2}.$$

Exemple : suite de Rudin-Shapiro généralisée avec $p = 3$

0 0 0 1 2 0 2 1 0 0 0 1 2 0 2 1 0 0 0 0 2 0 1 1 0 2 0 0 0 0 1 2 0 2
 1 1 1 1 2 0 1 0 2 1 2 2 2 1 2 0 0 2 1 0 0 0 0 1 2...

2. Expérimentalement, on observe un résultat plus fort...

Pour tout $(i, j) \in G^2$, pour tout $r \geq 1$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{card} \left\{ n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket : (u_n, u_{n+r}) = (i, j) \right\} = \frac{1}{|G|^2}.$$

Exemple : suite de Rudin-Shapiro généralisée avec $p = 3$

0 0 0 0 1 2 0 2 1 0 0 0 1 2 0 2 1 0 0 0 0 2 0 1 1 0 2 0 0 0 0 1 2 0 2
 1 1 1 1 2 0 1 0 2 1 2 2 2 1 2 0 0 2 1 0 0 0 0 1 2...

2. Expérimentalement, on observe un résultat plus fort...

Pour tout $(i, j) \in G^2$, pour tout $r \geq 1$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{card} \left\{ n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket : (u_n, u_{n+r}) = (i, j) \right\} = \frac{1}{|G|^2}.$$

Exemple : suite de Rudin-Shapiro généralisée avec $p = 3$

0 0 0 0 1 2 0 2 1 0 0 0 1 2 0 2 1 0 0 0 0 2 0 1 1 0 2 0 0 0 0 1 2 0 2
 1 1 1 1 2 0 1 0 2 1 2 2 2 1 2 0 0 2 1 0 0 0 0 1 2...

2. Expérimentalement, on observe un résultat plus fort...

Pour tout $(i, j) \in G^2$, pour tout $r \geq 1$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{card} \left\{ n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket : (u_n, u_{n+r}) = (i, j) \right\} = \frac{1}{|G|^2}.$$

Exemple : suite de Rudin-Shapiro généralisée avec $p = 3$

0 0 0 0 1 2 0 2 1 0 0 0 1 2 0 2 1 0 0 0 0 2 0 1 1 0 2 0 0 0 0 1 2 0 2
 1 1 1 1 2 0 1 0 2 1 2 2 2 1 2 0 0 2 1 0 0 0 0 1 2...

2. Expérimentalement, on observe un résultat plus fort...

Pour tout $(i, j) \in G^2$, pour tout $r \geq 1$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{card} \left\{ n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket : (u_n, u_{n+r}) = (i, j) \right\} = \frac{1}{|G|^2}.$$

Exemple : suite de Rudin-Shapiro généralisée avec $p = 3$

0 0 0 0 1 2 0 2 1 0 0 0 1 2 0 2 1 0 0 0 0 2 0 1 1 0 2 0 0 0 0 1 2 0 2
 1 1 1 1 2 0 1 0 2 1 2 2 2 1 2 0 0 2 1 0 0 0 0 1 2...

2. Expérimentalement, on observe un résultat plus fort...

Pour tout $(i, j) \in G^2$, pour tout $r \geq 1$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{card} \left\{ n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket : (u_n, u_{n+r}) = (i, j) \right\} = \frac{1}{|G|^2}.$$

Exemple : suite de Rudin-Shapiro généralisée avec $p = 3$

0 0 0 0 1 2 0 2 1 0 0 1 2 0 2 1 0 0 0 0 2 0 1 1 0 2 0 0 0 0 1 2 0 2
 1 1 1 1 2 0 1 0 2 1 2 2 2 1 2 0 0 2 1 0 0 0 0 1 2...

2. Expérimentalement, on observe un résultat plus fort...

Pour tout $(i, j) \in G^2$, pour tout $r \geq 1$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{card} \left\{ n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket : (u_n, u_{n+r}) = (i, j) \right\} = \frac{1}{|G|^2}.$$

Exemple : suite de Rudin-Shapiro généralisée avec $p = 3$

0 0 0 0 1 2 0 2 1 0 0 0 1 2 0 2 1 0 0 0 0 2 0 1 1 0 2 0 0 0 0 1 2 0 2
 1 1 1 1 2 0 1 0 2 1 2 2 2 1 2 0 0 2 1 0 0 0 0 1 2...

On fixe l'écart r , et on écrit n et $n+r$ en base k .
On note c_n le dernier indice où il y a une différence.

$$\begin{aligned} [n]_k &= x_0 \ x_1 \ \cdots \ x_{c_n} \ x_{c_n+1} \ x_{c_n+2} \ \cdots \\ [n+r]_k &= y_0 \ y_1 \ \cdots \ y_{c_n} \ x_{c_n+1} \ x_{c_n+2} \ \cdots \end{aligned}$$

On fixe l'écart r , et on écrit n et $n+r$ en base k .
 On note c_n le dernier indice où il y a une différence.

$$\begin{aligned} [n]_k &= x_0 \ x_1 \ \cdots \ x_{c_n} \ x_{c_n+1} \ x_{c_n+2} \ \cdots \\ [n+r]_k &= y_0 \ y_1 \ \cdots \ y_{c_n} \ x_{c_n+1} \ x_{c_n+2} \ \cdots \end{aligned}$$

On appelle **fibre** de n l'ensemble :

$$\mathcal{F}(n) = \left\{ \begin{array}{ccccccc} x_0 & x_1 & \cdots & x_{c_n} & 0 & x_{c_n+2} & x_{c_n+3} & \cdots, \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_{c_n} & 1 & x_{c_n+2} & x_{c_n+3} & \cdots, \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_{c_n} & 2 & x_{c_n+2} & x_{c_n+3} & \cdots, \\ & & & & \vdots & & & \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_{c_n} & k-1 & x_{c_n+2} & x_{c_n+3} & \cdots \end{array} \right\}.$$

On considère le i ème nombre de la fibre, noté n_i .

$$\begin{array}{rcccccccc}
 [n_i]_k & = & x_0 & x_1 & \cdots & x_{c_n} & i & x_{c_n+2} & x_{c_n+3} & \cdots \\
 [n_i + r]_k & = & y_0 & y_1 & \cdots & y_{c_n} & i & x_{c_n+2} & x_{c_n+3} & \cdots
 \end{array}$$

On considère le i ème nombre de la fibre, noté n_i .

$$\begin{aligned} [n_i]_k &= x_0 \quad x_1 \quad \cdots \quad x_{c_n} \quad i \quad x_{c_n+2} \quad x_{c_n+3} \quad \cdots \\ [n_i + r]_k &= y_0 \quad y_1 \quad \cdots \quad y_{c_n} \quad i \quad x_{c_n+2} \quad x_{c_n+3} \quad \cdots \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} u_{n_i} &= C + f(x_{c_n}, i) + f(i, x_{c_n+2}) \\ u_{n_i+r} &= C' + f(y_{c_n}, i) + f(i, x_{c_n+2}). \end{aligned}$$

On considère le i ème nombre de la fibre, noté n_i .

$$\begin{aligned} [n_i]_k &= x_0 \quad x_1 \quad \cdots \quad x_{c_n} \quad i \quad x_{c_n+2} \quad x_{c_n+3} \quad \cdots \\ [n_i + r]_k &= y_0 \quad y_1 \quad \cdots \quad y_{c_n} \quad i \quad x_{c_n+2} \quad x_{c_n+3} \quad \cdots \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} u_{n_i} &= C + f(x_{c_n}, i) + f(i, x_{c_n+2}) \\ u_{n_i+r} &= C' + f(y_{c_n}, i) + f(i, x_{c_n+2}). \end{aligned}$$

Donc

$$u_{n_i+r} - u_{n_i} = C'' + f(y_{c_n}, i) - f(x_{c_n}, i).$$

D'après la condition de différence, quand i varie, $u_{n_i+r} - u_{n_i}$ prend chaque valeur de G le même nombre de fois.

En particulier, au sein d'une fibre, on a aussi souvent $u_{n_i+r} = u_{n_i}$ que $u_{n_i+r} = u_{n_i} + g$, pour chaque $g \in G$.

Si on fixe un entier N grand par rapport à r , pour la plupart des entiers $n \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket$, $\mathcal{F}(n) \subset \llbracket 0, N - 1 \rrbracket$.

$$[N]_k = a_0 a_1 \cdots a_{\ell_N-1} a_{\ell_N} 0 0 \cdots$$

Si on fixe un entier N grand par rapport à r , pour la plupart des entiers $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, $\mathcal{F}(n) \subset \llbracket 0, N-1 \rrbracket$.

$$[N]_k = a_0 a_1 \cdots a_{\ell_N-1} a_{\ell_N} 0 0 \cdots$$

$$[n]_k = \underbrace{x_0 x_1 \cdots x_{\ell_N-2}}_{\gamma < k^{\ell_N-1-r}} \alpha \underbrace{a'_{\ell_N}}_{< a_{\ell_N}} 0 0 \cdots$$

$$[n+r]_k = x'_0 x'_1 \cdots x'_{\ell_N-2} \alpha a'_{\ell_N} 0 0 \cdots$$

Si on fixe un entier N grand par rapport à r , pour la plupart des entiers $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, $\mathcal{F}(n) \subset \llbracket 0, N-1 \rrbracket$.

$$[N]_k = a_0 a_1 \cdots a_{\ell_N-1} a_{\ell_N} 0 0 \cdots$$

$$[n]_k = \underbrace{x_0 x_1 \cdots x_{\ell_N-2}}_{\gamma < k^{\ell_N-1-r}} \alpha \underbrace{a'_{\ell_N}}_{< a_{\ell_N}} 0 0 \cdots$$

$$[n+r]_k = x'_0 x'_1 \cdots x'_{\ell_N-2} \alpha a'_{\ell_N} 0 0 \cdots$$

$$[n]_k = \underbrace{x_0 x_1 \cdots x_{\ell_N-3}}_{\gamma < k^{\ell_N-2-r}} \alpha \underbrace{a'_{\ell_N-1}}_{< a_{\ell_N-1}} a_{\ell_N} 0 0 \cdots$$

$$[n+r]_k = x'_0 x'_1 \cdots x'_{\ell_N-3} \alpha a'_{\ell_N-1} a_{\ell_N} 0 0 \cdots$$

Au final, le nombre d'entiers $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ tels que $\mathcal{F}(n) \subset \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ est $> N - rk^2 - rk\sigma_k(N)$.

Théorème [M.-Stoll-Tahay, arXiv 2020]

On pose $\pi = k/|G|$. Sous la condition de différence, pour tout $g \in G$,

$$\begin{aligned} \text{card} \left\{ n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket : u_{n+r} - u_n = g \right\} &\geq \frac{N}{|G|} - \pi rk - \pi r\sigma_k(N) \\ &\geq \frac{N}{|G|} - \pi rk(1 + \log_k(N)). \end{aligned}$$

Théorème [M.-Stoll-Tahay, arXiv 2020]

Sous la condition de différence, pour tout $(i, j) \in G^2$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{card} \left\{ n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket : (u_n, u_{n+r}) = (i, j) \right\} = \frac{1}{|G|^2}.$$

Idée de la preuve : soit $n \in \llbracket 0, k^{2N+1} - 1 \rrbracket$ tel que $x_{N+1} = \alpha$, i.e.
 $n = m_1 k^{N+1} + \alpha k^N + m_2$, avec $m_1, m_2 \in \llbracket 0, k^N - 1 \rrbracket$

$$(u_n, u_{n+r}) = (u_{km_1+\alpha}, u_{km_1+\alpha}) + (u_{\alpha k^N+m_2}, u_{\alpha k^N+m_2+r}).$$

- Pour m_1 choisi unif. au hasard, la distrib. de $u_{km_1+\alpha}$ tend vers la distrib. unif. dans G
- Pour m_2 choisi unif. au hasard, la distrib. de $u_{\alpha k^N+m_2+r} - u_{\alpha k^N+m_2}$ tend vers la distrib. unif. dans G

Plan

- 1 Suites automatiques et suites block-additives
- 2 Corrélations discrètes
- 3 Dimension supérieure

En dimension d , on définit une suite **block-additive**

$u = (u_{n_1, \dots, n_d})_{(n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d} \in G^{\mathbb{N}^d}$ à l'aide d'une fonction de poids

$f : \Sigma_k^d \times \Sigma_k^d \rightarrow G$ telle que $f \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0$.

$$u_{n_1, \dots, n_d} = \sum_{i \in \mathbb{N}} f \left(\begin{pmatrix} x_i^1 \\ \vdots \\ x_i^d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{i+1}^1 \\ \vdots \\ x_{i+1}^d \end{pmatrix} \right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} f(x_i, x_{i+1}).$$

Condition de différence : si $i \neq j$, alors pour tout $g \in G$,

$$\text{card} \left\{ h \in \Sigma_k^d : f(i, h) - f(j, h) = g \right\} = \frac{k}{|G|}.$$

Sous cette condition, mêmes résultats d'équidistribution des couples (u_n, u_{n+r}) , pour un vecteur $r \in \mathbb{N}^d \setminus \{(0, \dots, 0)\}$.

Exemples pour $k = 2$, $d = 2$, $G = \mathbb{Z}_2$.

Exemple

Matrice de poids (ordre lexicographique sur Σ_2^2) :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$[436]_2 = 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ \dots$$

$$[48]_2 = 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots$$

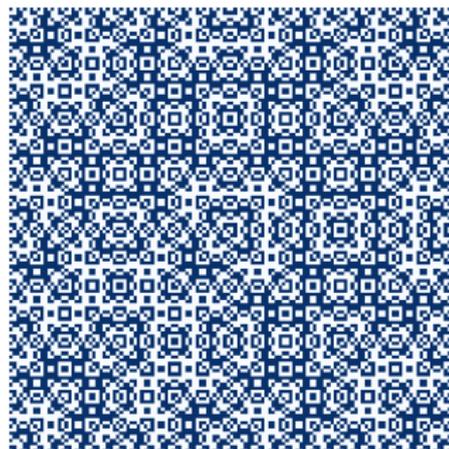
$$u_{436,48} \equiv \frac{0 + 1 + 1 + 1 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1 + 0 + \dots}{2} \equiv 0 \pmod{2}$$

7		1	0	1	0	0	1	0	1
6		0	0	1	1	1	1	0	0
5		1	1	1	1	1	1	1	1
4		0	1	1	0	0	1	1	0
3		1	0	0	1	0	1	1	0
2		0	0	0	0	1	1	1	1
1		1	1	0	0	1	1	0	0
0		0	1	0	1	0	1	0	1
n_2/n_1		0	1	2	3	4	5	6	7

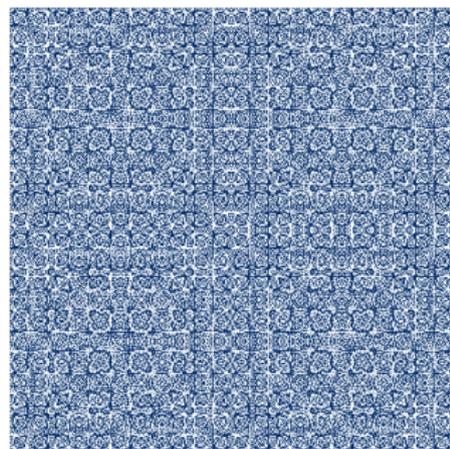
Matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Termes dans $\llbracket 0, 2^7 - 1 \rrbracket^2$



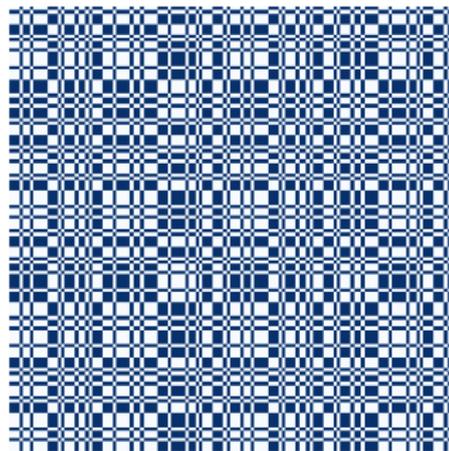
Termes dans $\llbracket 0, 2^{10} - 1 \rrbracket^2$



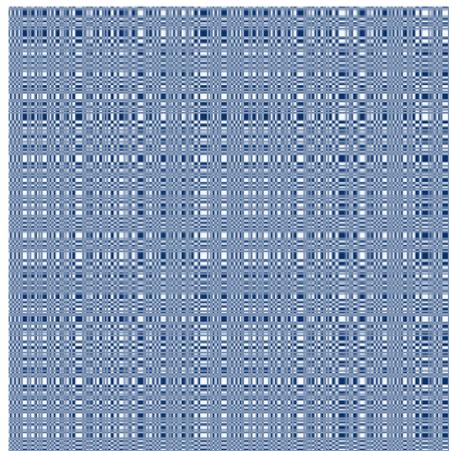
Matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Termes dans $\llbracket 0, 2^7 - 1 \rrbracket^2$



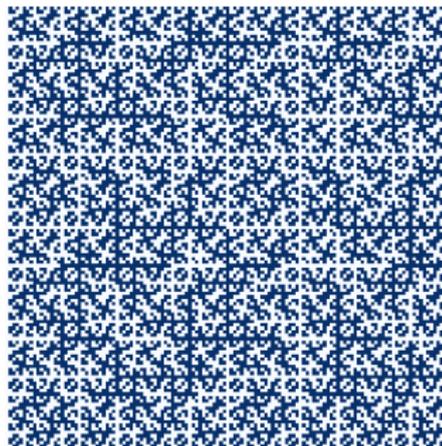
Termes dans $\llbracket 0, 2^{10} - 1 \rrbracket^2$



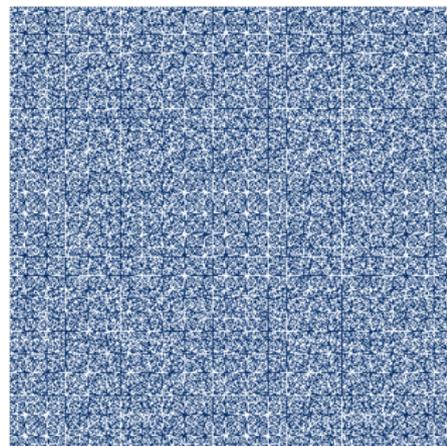
Matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Termes dans $\llbracket 0, 2^7 - 1 \rrbracket^2$



Termes dans $\llbracket 0, 2^{10} - 1 \rrbracket^2$

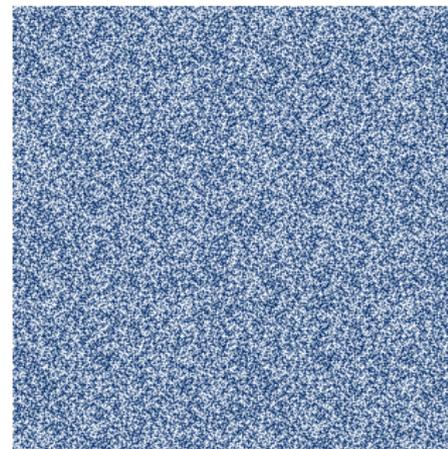
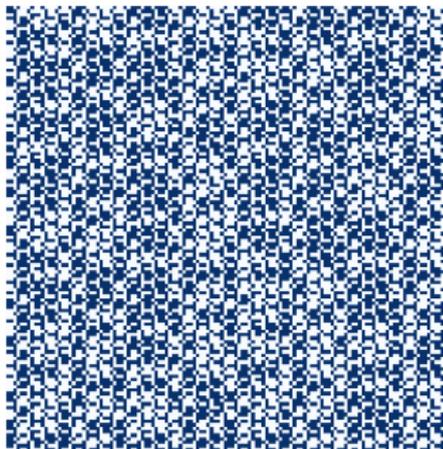


Matrice

Termes dans $\llbracket 0, 2^7 - 1 \rrbracket^2$

Termes dans $\llbracket 0, 2^{10} - 1 \rrbracket^2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Perspectives...

- Suites block-additives avec des blocs de taille L ?

Condition de différence : si $i \neq j$, alors pour tout $(x_2, \dots, x_{L-1}) \in \Sigma_k^{L-2}$, et $g \in G$,

$$\text{card}\{h \in \Sigma_k : f(i, x_2, \dots, x_{L-1}, h) - f(j, x_2, \dots, x_{L-1}, h) = g\} = \frac{k}{|G|}$$

Exemple :

$$k = 2, G = \mathbb{Z}_2, L = 3, \quad f(x, y, z) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y = z \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Perspectives...

- Suites block-additives avec des blocs de taille L ?

Condition de différence : si $i \neq j$, alors pour tout $(x_2, \dots, x_{L-1}) \in \Sigma_k^{L-2}$, et $g \in G$,

$$\text{card}\{h \in \Sigma_k : f(i, x_2, \dots, x_{L-1}, h) - f(j, x_2, \dots, x_{L-1}, h) = g\} = \frac{k}{|G|}$$

Exemple :

$$k = 2, G = \mathbb{Z}_2, L = 3, \quad f(x, y, z) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y = z \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Pour $\ell \geq 3$, peut-on construire une suite block-additive ayant les mêmes corrélations d'ordre ℓ qu'une suite i.i.d. uniforme de symboles ?

- *Discrete correlations of order 2 of generalised Rudin-Shapiro sequences: a combinatorial approach.*
Avec Thomas Stoll et Pierre-Adrien Tahay. **arXiv**, 2020.

- *Discrete correlations of order 2 of generalised Rudin-Shapiro sequences: a combinatorial approach.*
 Avec Thomas Stoll et Pierre-Adrien Tahay. **arXiv, 2020.**
- *Bijections between walks inside a triangular domain and Motzkin paths of bounded amplitude.*
 Avec Julien Courtiel et Andrew Elvey Price. **arXiv, 2020.**

