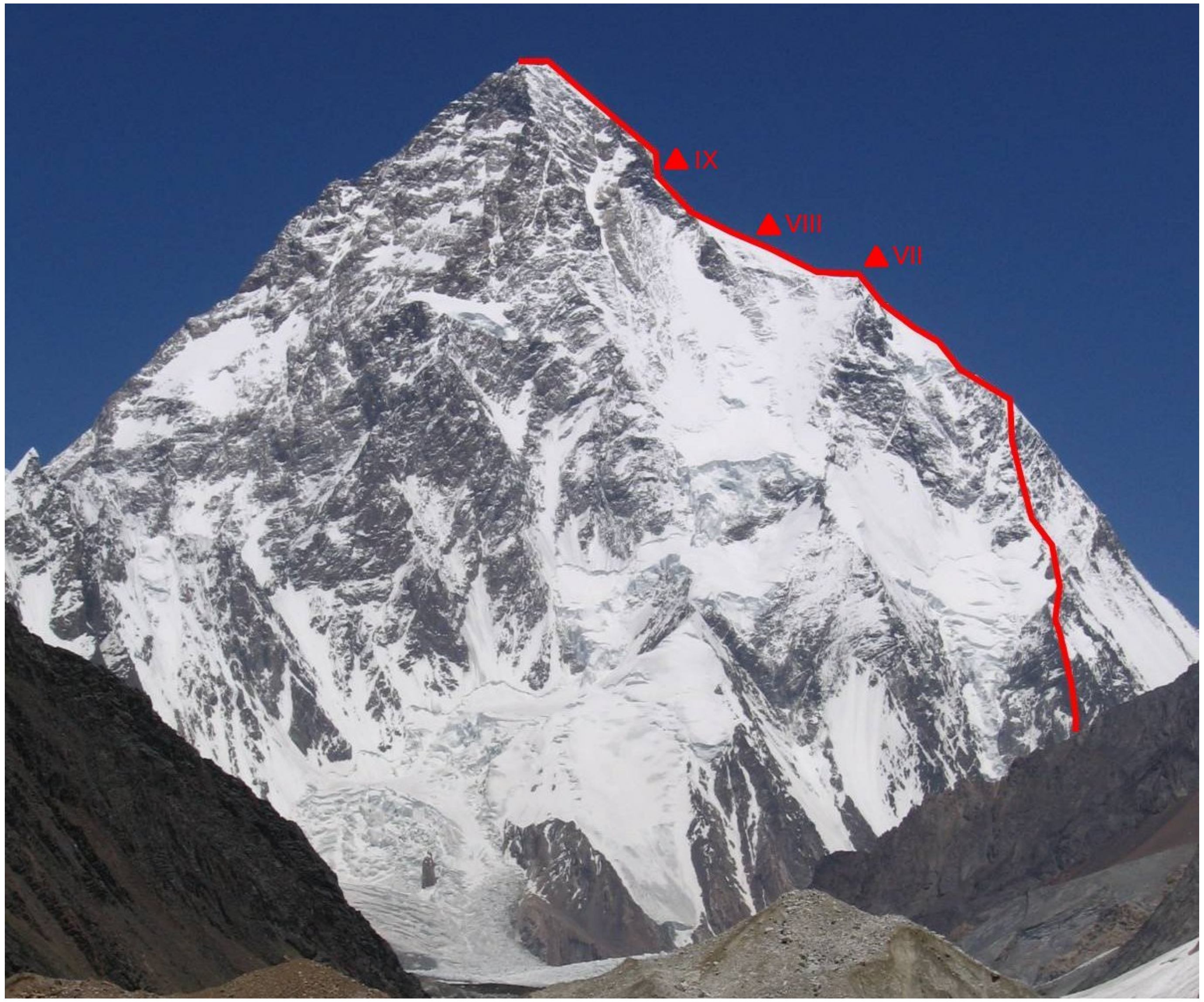
POLYGONES AUTO-ÉVITANTS

La route déterministe



LMPA Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville

PROJET FINANCÉ PAR L'ANR - PROJECT FUNDED BY THE ANR

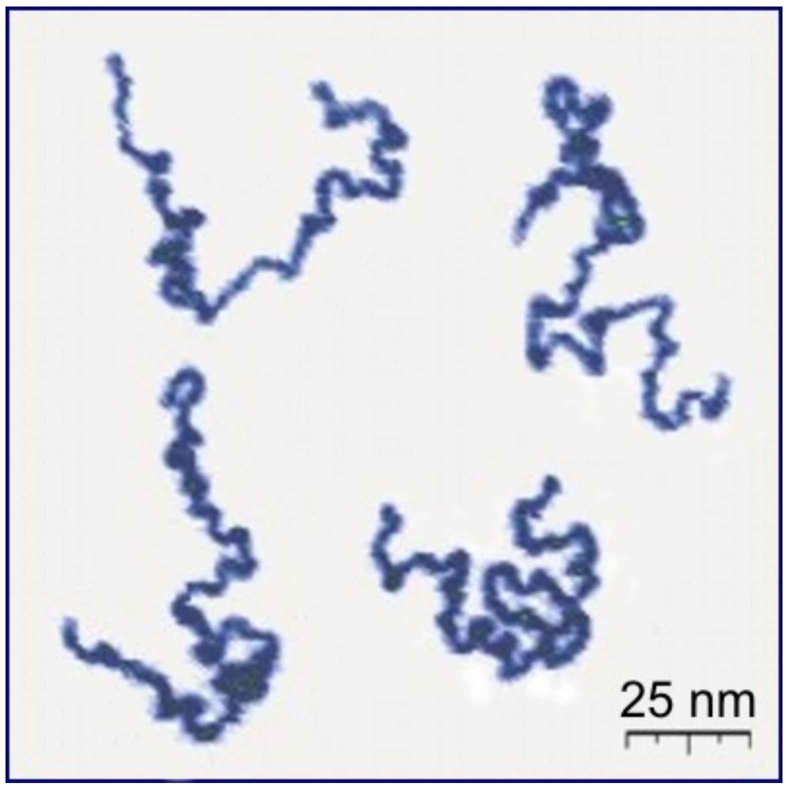
Pierre-Louis Giscard

PLAN

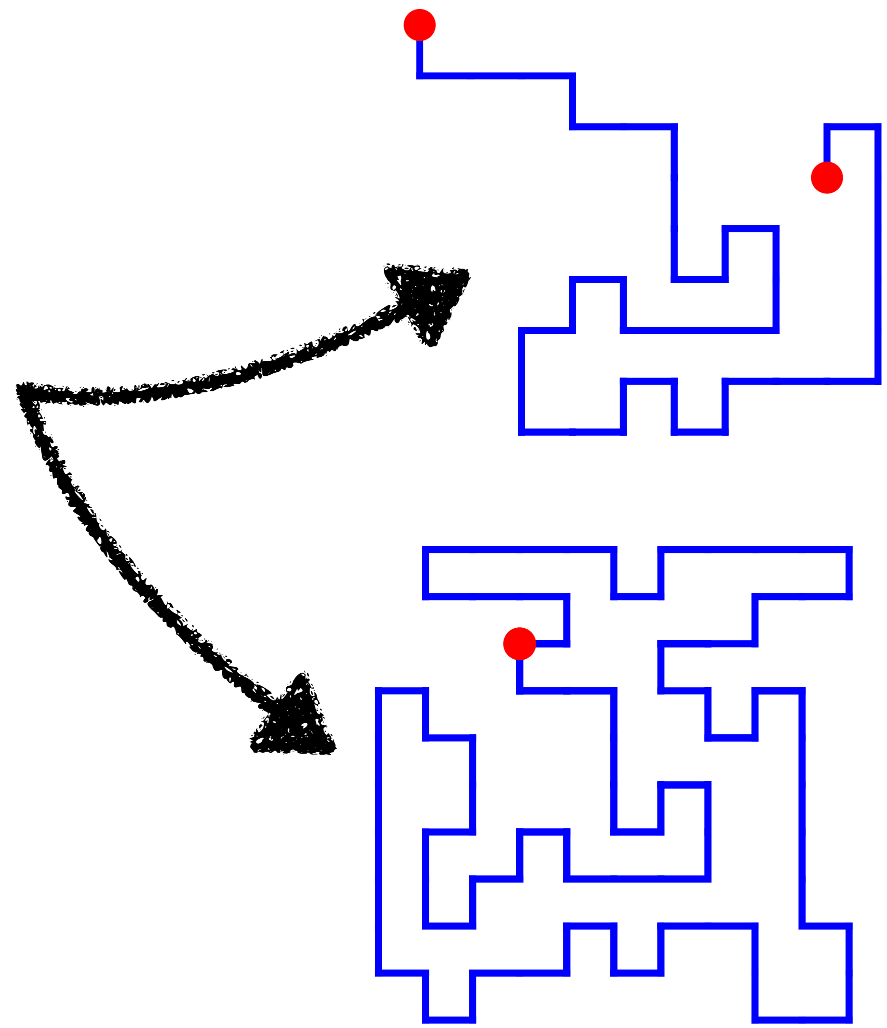
- Un vieux problème
  - *Motivation originelle*
  - *La route probabiliste*
  - *Les prémisse d'une autre voie*
- Compter les chemins avec des cribles
  - *Qu'est ce qu'un crible ?!*
  - *Graphes finis*
  - *Graphes infinis : valeurs de SLE_2*
  - *Dénombrement des SAPs : premier essai*
- La suite

UN VIEUX PROBLÈME

UN VIEUX PROBLÈME



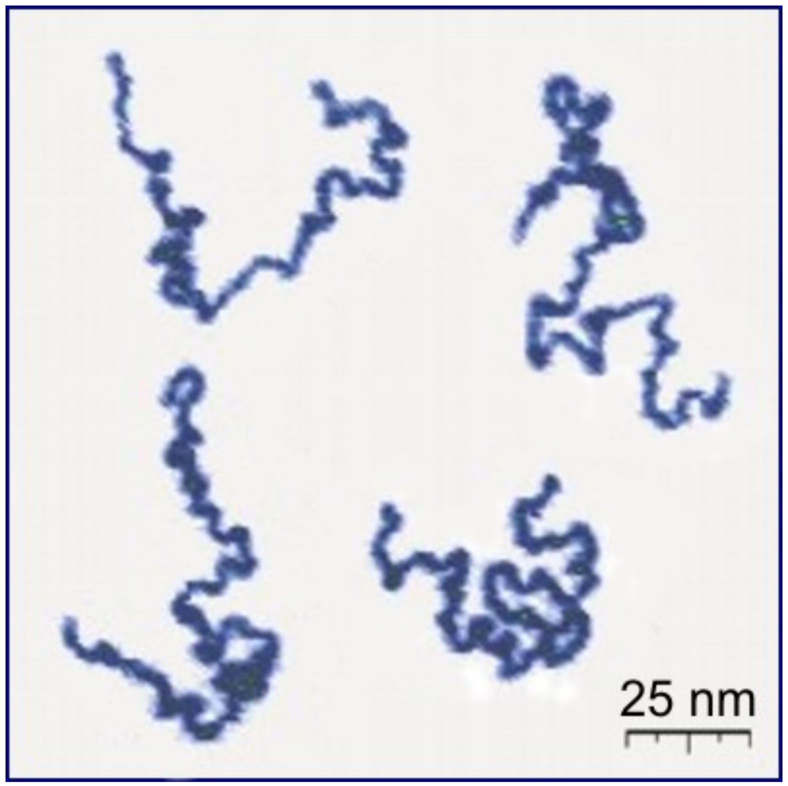
Chaines de polymères



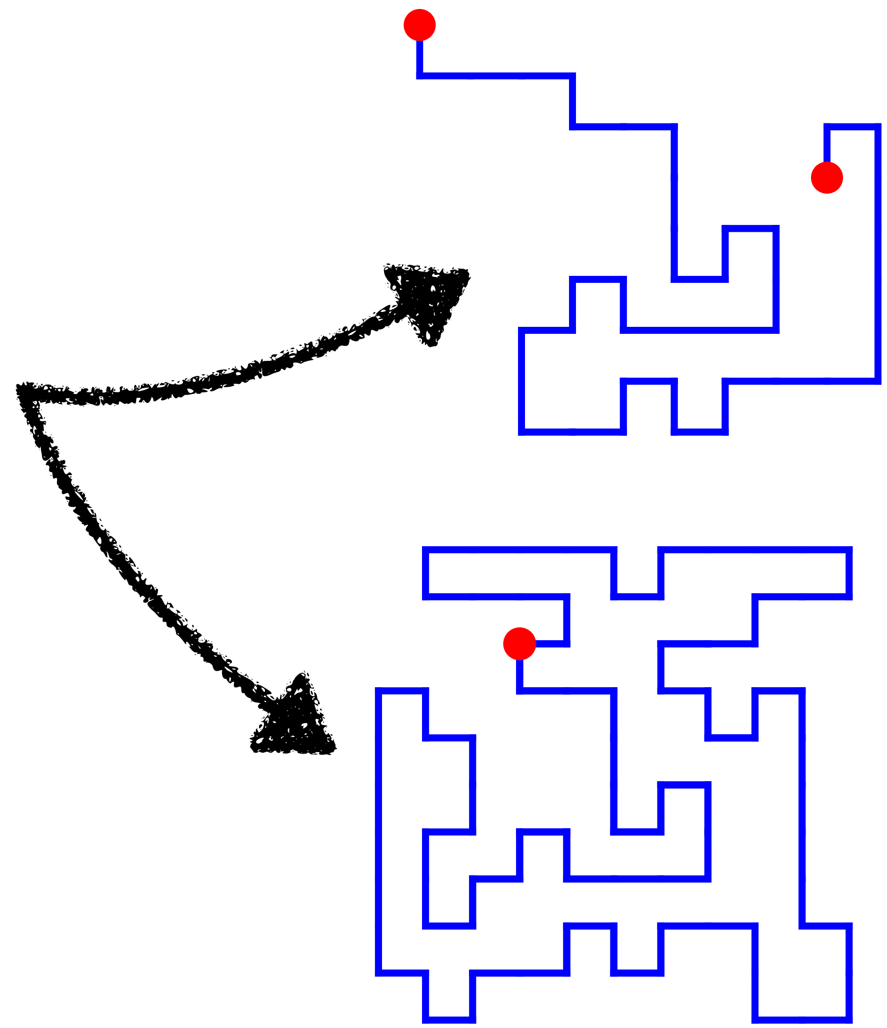
Self-Avoiding Walk (SAW)

Self-Avoiding Polygon (SAP)

UN VIEUX PROBLÈME



Chaines de polymères



Self-Avoiding Walk (SAW)

Self-Avoiding Polygon (SAP)

QUESTION (~1947)

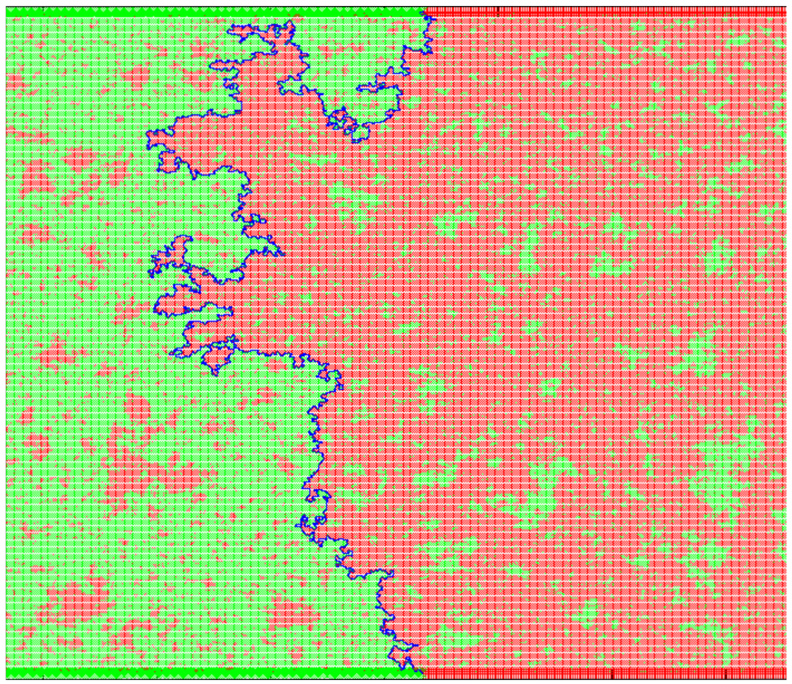
Combien de SAPs de longueur ℓ y a-t-il quand $\ell \to \infty$?

$$\mu^{\ell}\, \ell^{-5/2}$$

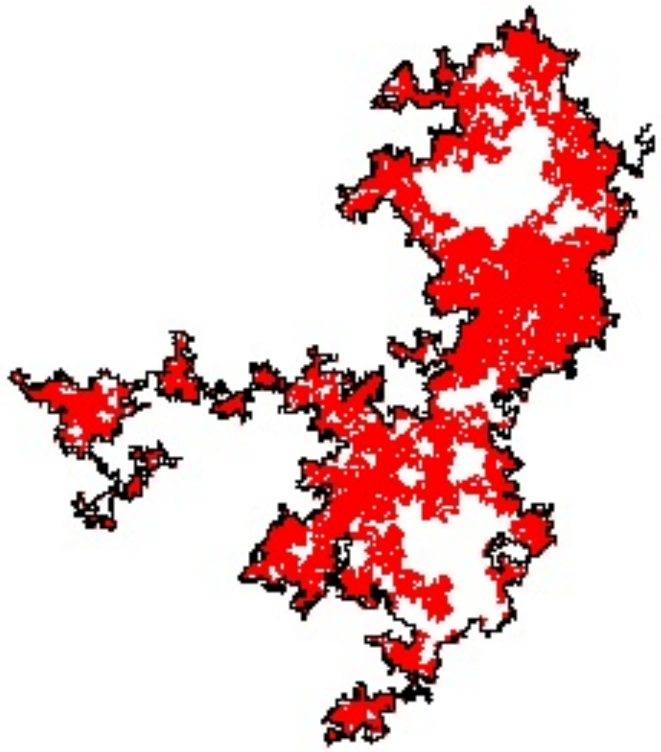
« ***A widely open problem*** » Flajolet & Sedgewick

LA ROUTE PROBABILISTE

- Les SAWs et SAPs sont 'partout'



Frontière de phases en physique



Frontière du mouvement Brownien

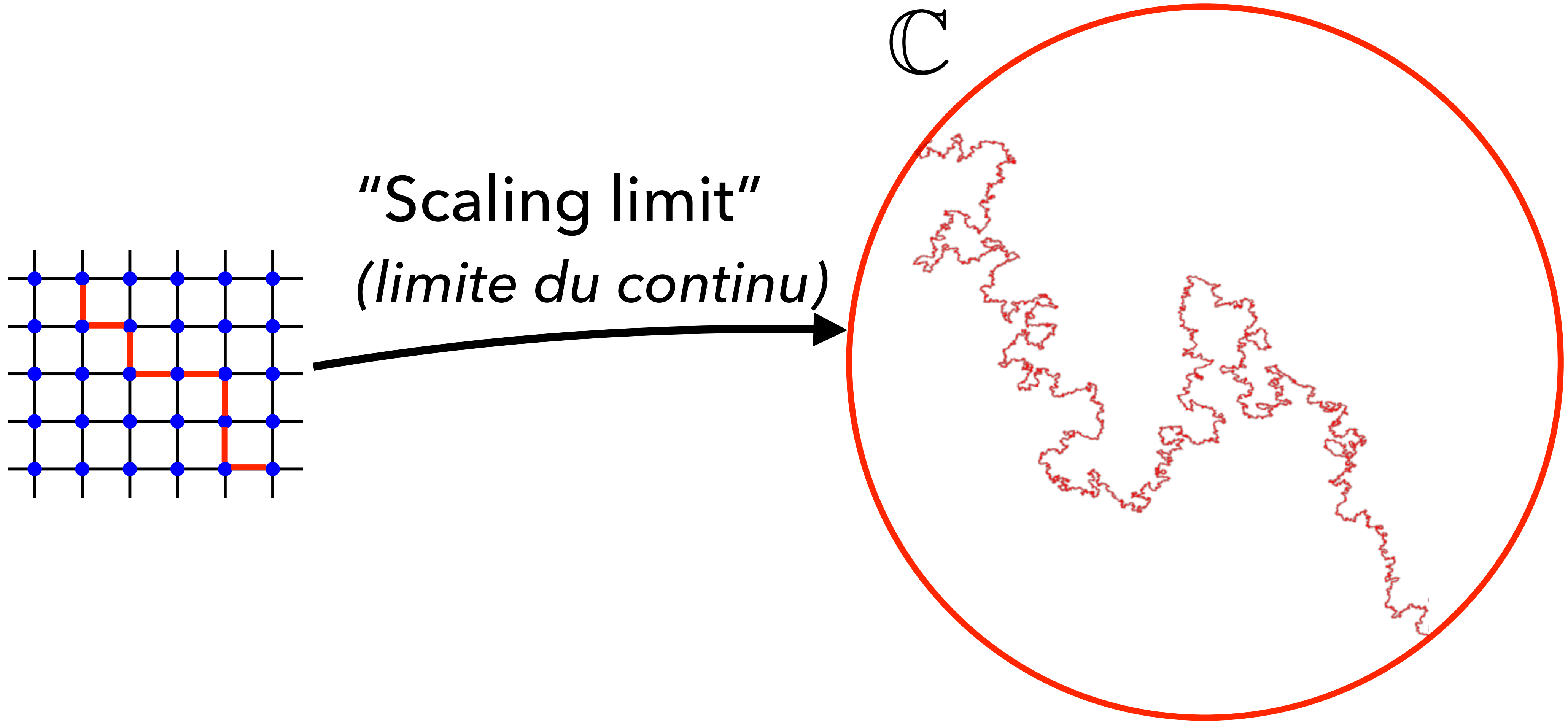
Boucles effacées de chemins aléatoires

Loi 'uniforme' sur les SAWs / SAPs

G. Lawler, "Conformally invariant loop-measures", International Congress of Mathematicians 2018
https://eta.impa.br/dl/PL009.pdf https://www.youtube.com/watch?v=gWn160Xc6aQ

LA ROUTE PROBABILISTE

Mesure de boucles et invariance conforme



Supposons : La limite de ces distributions existe

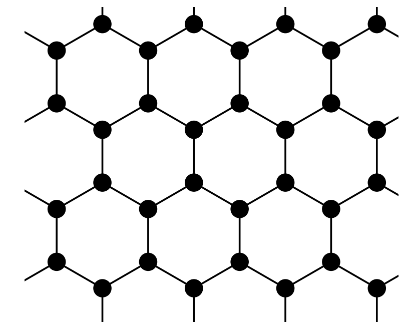
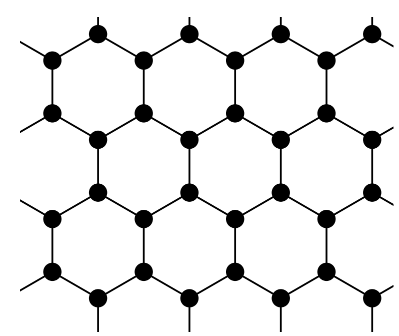
Elle est conformellement invariante

Elle est Markov sur les domaines de $\mathbb{C}$

- Une *seule* famille de courbe satisfait tout ça ! SLE$_\kappa$

LA ROUTE PROBABILISTE

Mesure de boucles et invariance conforme

Auteur		Travaux
S. Smirnov		SLE_κ Ising, percolation sur 
W. Werner		Ising, SLE_κ
O. Schramm		*Inventeur de* SLE_κ
G. Lawler	**PRIX WOLF**	Boucles-effacées, SLE_2
R. Kenyon		
H. Duminil-Copin		$\mu = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ sur 
T. Guttman		Valeurs numériques de μ

LA ROUTE PROBABILISTE

QUESTION (~1947)

Combien de SAPs de longueur ℓ y a-t-il quand $\ell \to \infty$?

$$\mu^{\ell}\,\ell^{-5/2}$$

Conjecture : Loi *uniforme* sur les SAPs

*L*imite du continu bien définie

*E*st conformellement invariante

*E*st Markov sur les domaines de $\mathbb{C}$

LA ROUTE PROBABILISTE

QUESTION (~1947)

Combien de SAPs de longueur ℓ y a-t-il quand $\ell \to \infty$?

$$\mu^{\ell}\,\ell^{-5/2}$$

Conjecture : Loi *uniforme* sur les SAPs

*L*imite du continu bien définie

*E*st conformellement invariante

*E*st Markov sur les domaines de $\mathbb{C}$

$\boxed{\mathrm{SLE}_{8/3}}$

PLAN

- Un vieux problème
  - *Motivation originelle*
  - *La route probabiliste*
  - *Les prémisse d'une autre voie*
- Compter les chemins avec des cribles
  - *Qu'est ce qu'un crible ?!*
  - *Graphes finis*
  - *Graphes infinis : valeurs de SLE_2*
  - *Cribles à gauche: chemins quasi auto-évitants*
- La suite

LES PREMISSES

- Cartier & Foata (1969)
  Mots sur les arêtes e_{ij} d'un graphe et

$$e_{ij}\,e_{ik} \neq e_{ik}\,e_{ij} \qquad\qquad e_{ij}\,e_{kl} = e_{kl}\,e_{ij}$$

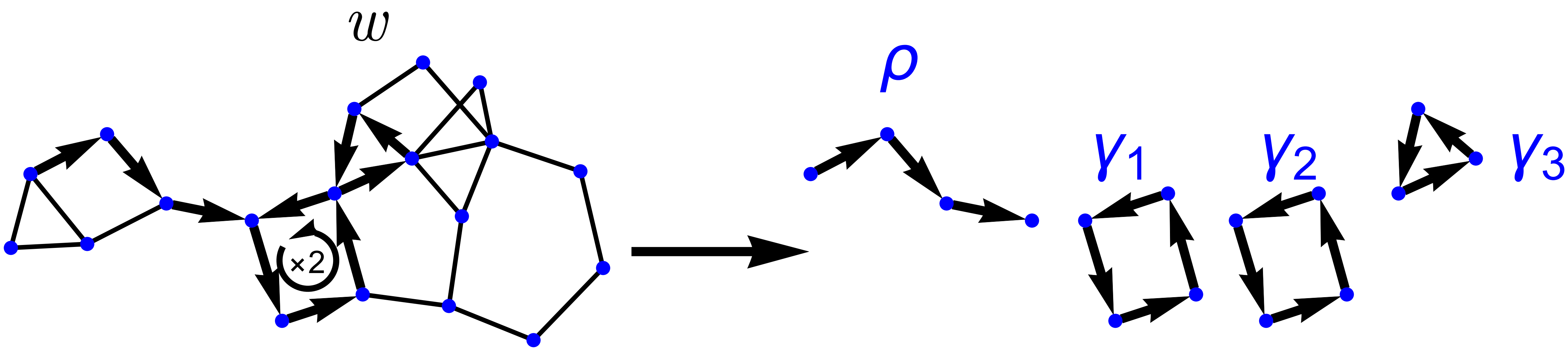
  Classes d'équivalences forment un monoïd $\mathcal{M}$

  $\mathcal{C} \subsetneq \mathcal{M}$ autant d'arêtes entrantes que sortantes (cycles)

  Exemple dans $\mathcal{C}$: $[e_{12}\, e_{23}\, e_{31}\, e_{78}\, e_{87}]$

- Viennot (1987): empilements de pièces

LES PREMISSES



- Monoïd $\mathcal{H}$: mots sur boucles effacées & multiplication

$$h = \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_n$$

Règle 1

Orientation des cycles compte
Point de départ d'un cycle ne compte pas

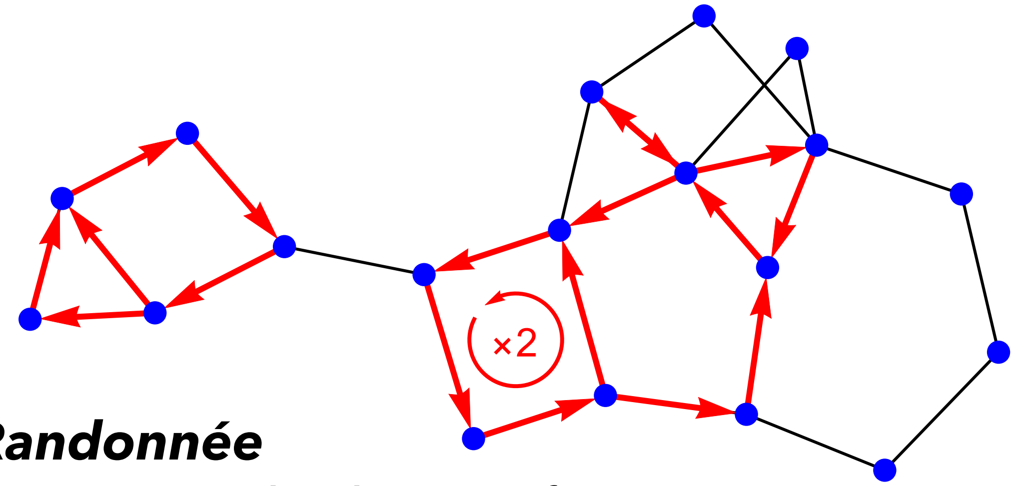
Règle 2

Deux mots commutent si disjoints sur le graphe

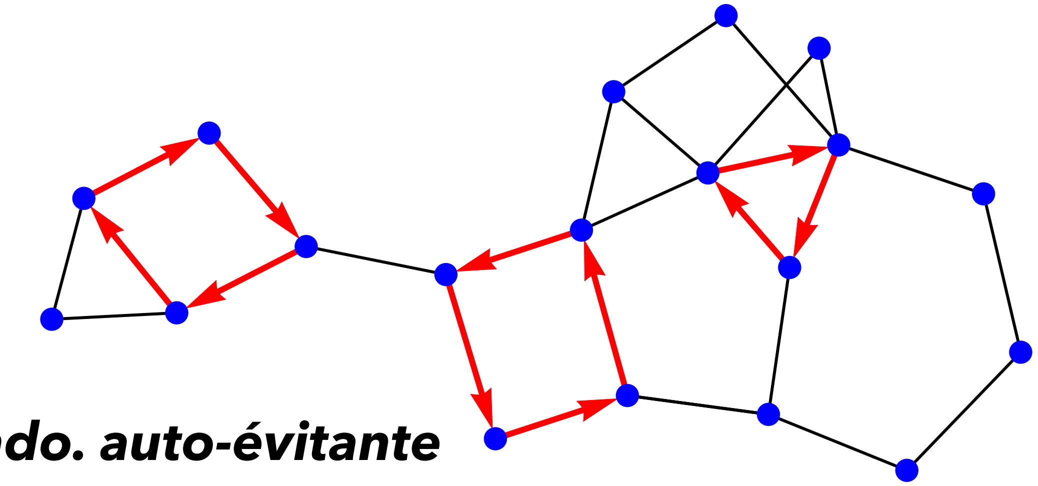
$$\boxed{\mathcal{H} = \mathcal{C}}$$

LES PREMISSES

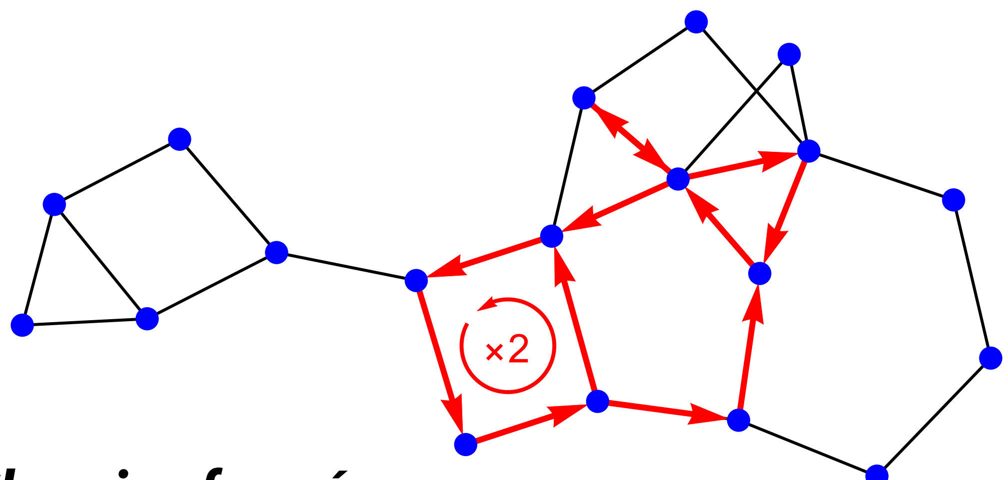
Différent types de randonnées



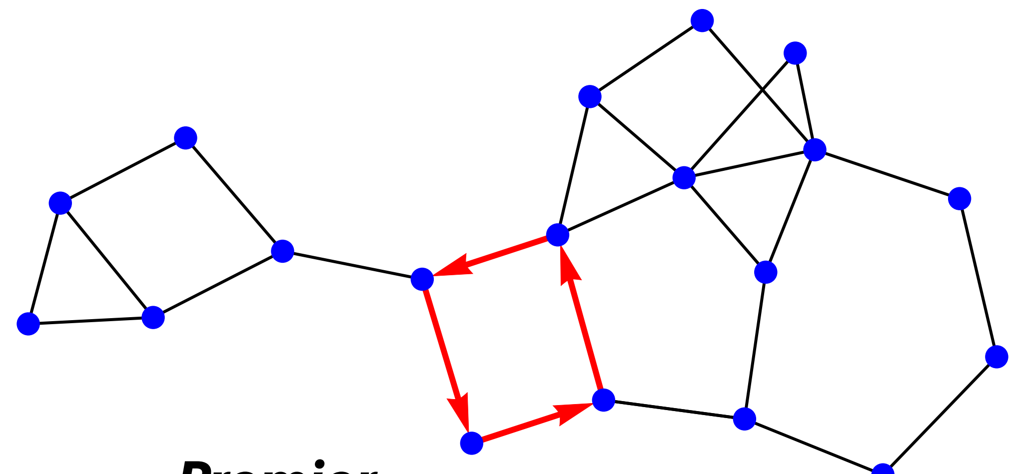
Randonnée
Un 'nuage' de chemins fermés !



Rando. auto-évitante
Cycles simples disjoints

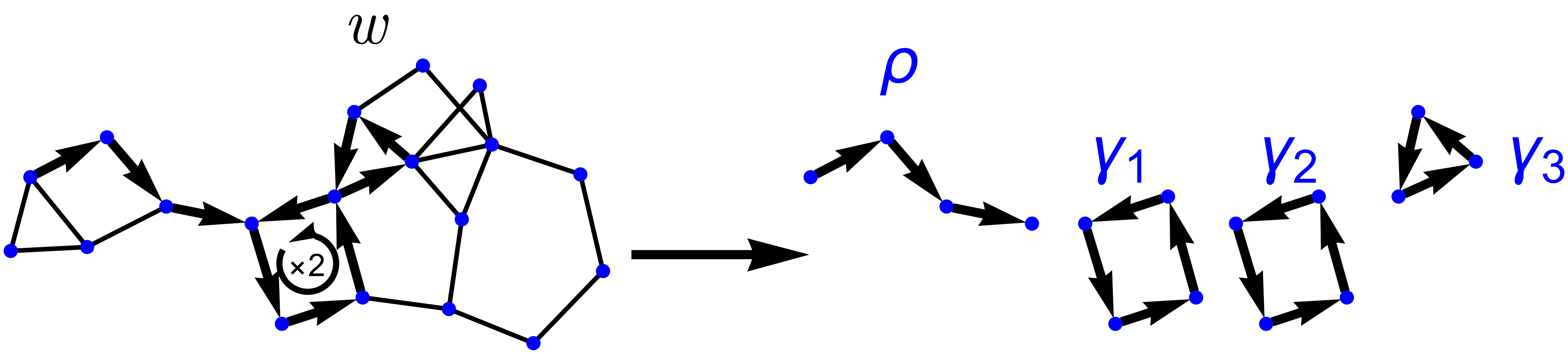


Chemins fermés
Les chemins sont des rando.
avec un unique diviseur premier à droite $w = hp$



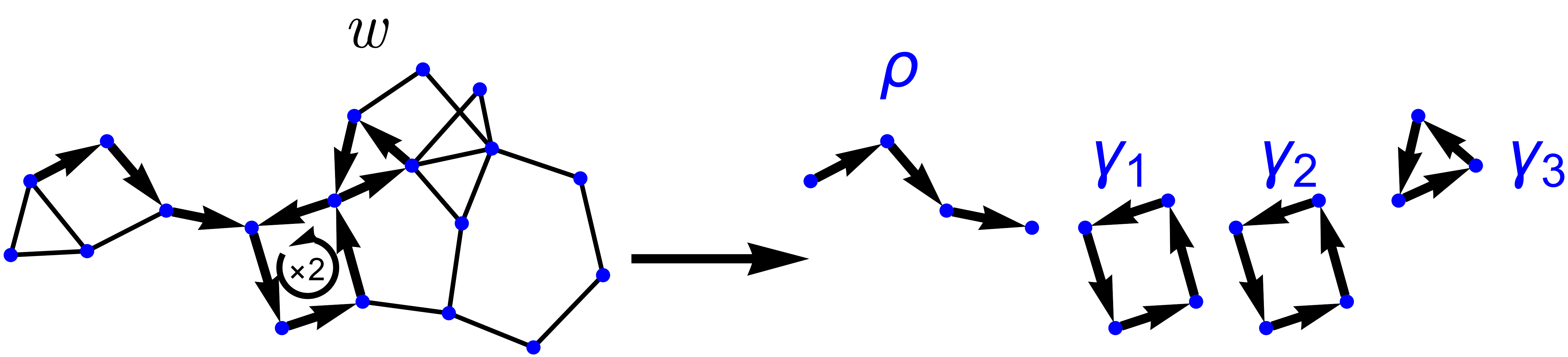
Premier
Cycle simple - SAP

LES PREMISSES



Prenons deux chemins fermés w, w' si une boucle γ est effacée de $w.w'$ alors elle est effacée de w ou de w'

LES PREMISSES



Prenons deux chemins fermés $w,\ w'$ si une boucle γ est effacée de $w.w'$ alors elle est effacée de w ou de w'

$$\gamma|w.w' \Rightarrow \gamma|w \text{ ou } \gamma|w'$$

Une théorie des nombres 'des chemins' ?!

EXTENSION DE LA THÉORIE DES NOMBRES

Une théorie en 3 étapes !

1. Ordre partiel de **divisibilité** sur les randonnées

$$h|h' \Rightarrow h \leq h'$$

2. Algèbre d'incidence du poset

3. Réduction : algèbre des series formelles sur les randonnées

$$\sum_{h \text{ Randonnée}} f(h)\ h$$

Doubilet, Rota (1972)

Rota *et al*. (1964-1974)

EXTENSION DE LA THÉORIE DES NOMBRES

THEOREME Il existe des graphes tels que

Séries formelles sur les rando.

$$\sum_{h \text{ Randonnée}} f(h)\ h$$

se réduit à $\longrightarrow$

Séries de Dirichlet

$$\sum_{n>0} \frac{a(n)}{n^s}$$

Théorie des nombres cas particulier

EXTENSION DE LA THÉORIE DES NOMBRES

Hikes	Number Theory
h hike	n integer
h, h' disjoint	n, m coprime
h self-avoiding	n square-free
p simple cycle	p prime
w walk	$n = p^k$

EXTENSION DE LA THÉORIE DES NOMBRES

	Hikes	Number theory
Zeta	$\zeta = \mathcal{S}1 = \sum_{h \in \mathcal{H}} h$ $\zeta = \frac{1}{\det(\mathsf{I}-\mathsf{W})}$	$\zeta_R(s) = \sum_{n>0} \frac{1}{n^s}$
Möbius	$\mu(h) = \begin{cases} (-1)^{\Omega(h)}, & h \text{ self-avoiding} \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$	$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^{\Omega(n)}, & n \text{ square-free} \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$
von Mangoldt	$\Lambda(h) = \begin{cases} \ell(p), & h \text{ walk}, p \mid h \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$ $\mathcal{S}\Lambda = \mathrm{Tr}\left[(\mathsf{I}-\mathsf{W})^{-1}\right]$	$\Lambda(n) = \begin{cases} \log(p), & n = p^k \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$
Liouville	$\lambda(h) = (-1)^{\Omega(h)}$ $\mathcal{S}\lambda = \frac{1}{\mathrm{perm}(\mathsf{I}-\mathsf{W})}$ $\vdots$	$\lambda(h) = (-1)^{\Omega(n)}$ $\vdots$

EXTENSION DE LA THÉORIE DES NOMBRES

	Hikes	Number Theory
Number of divisors	ζ^2	$\zeta_R(s)^2$
Log Zeta	$\log\zeta = \sum_h \frac{\Lambda(h)}{\ell(h)} h$	$\log\zeta_R(s) = \sum_n \frac{\Lambda(n)}{\log(n)} \frac{1}{n^s}$
Log-Mangoldt	$\ell(h) = \sum_{h' \vert h} \Lambda(h')$	$\log(n) = \sum_{d \vert n} \Lambda(n)$
Totally multiplicative functions	$f^{-1} = \sum_h \mu(h) f(h) h$ $f'/f = -\sum_h \Lambda(h) f(h) h$	$f^{-1} = \sum_n \frac{\mu(n) f(n)}{n^s}$ $f'/f = \sum_n \frac{\Lambda(n) f(n)}{n^s}$
Totally additive functions	$(f*\mu)(h) = \begin{cases} f(p), & h \text{ walk, } p \vert h \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$	$(f*\mu)(n) = \begin{cases} f(p), & n = p^k \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$
ζ'/ζ from the primes	$-\sum_{\gamma:\,\text{simple cycle}} \ell(\gamma) \frac{\det(\mathsf{I}-\mathsf{W}_{\backslash\gamma})}{\det(\mathsf{I}-\mathsf{W})}$	$-\sum_p \log p \, \frac{p^{-s}}{1-p^{-s}}$
Number Ω of prime factors	$\sum_{w:\,\text{walk}} w = \det(\mathsf{I}-\mathsf{W}) \sum_{h\in\mathcal{H}} \Omega(h)\, h$ $\vdots$	$\sum_{p,n} \frac{1}{p^{-ns}} = \zeta_R(s)^{-1} \sum_n \frac{\Omega(n)}{n^s}$ $\vdots$

EXTENSION DE LA THÉORIE DES NOMBRES

QUESTION (~1947)

Combien de SAPs de longueur ℓ y a-t-il quand $\ell \to \infty$?

$$\mu^\ell \, \ell^{-5/2}$$

« ***A widely open problem*** » Flajolet & Sedgewick

Extension du théorème des nombres premiers

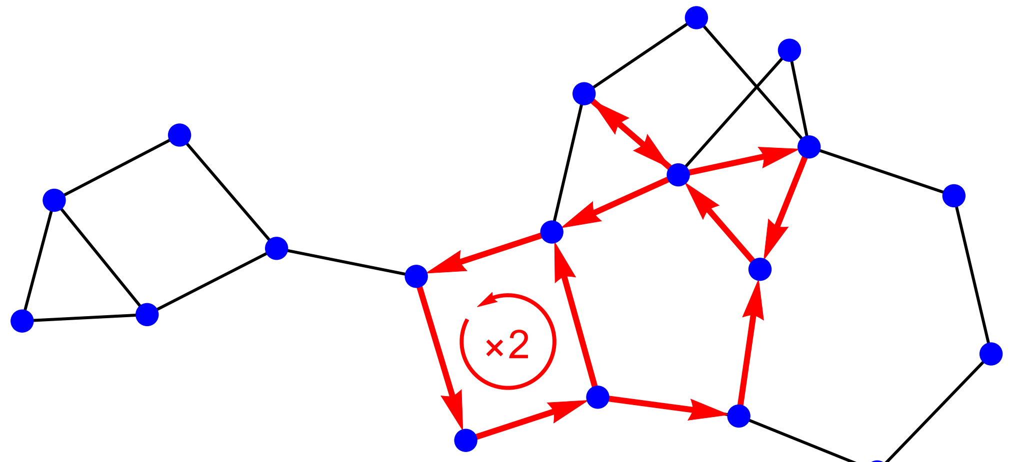
EXTENSION DE LA THÉORIE DES NOMBRES

Chemins longueur $\ell+1$ → *SAP longueur* $\ell+1$

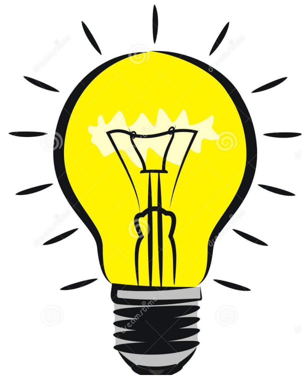
Chemins longueur $\ell+1$ *multiples de SAP de longueur* $L \leq \ell$

EXTENSION DE LA THÉORIE DES NOMBRES

Chemins longueur $\ell + 1$ → *SAP longueur* $\ell + 1$ | *Chemins longueur* $\ell + 1$ *multiples de SAP de longueur* $L \leq \ell$



Chemins fermés
Les chemins sont des rando.
avec un unique diviseur premier à droite $w = hp$

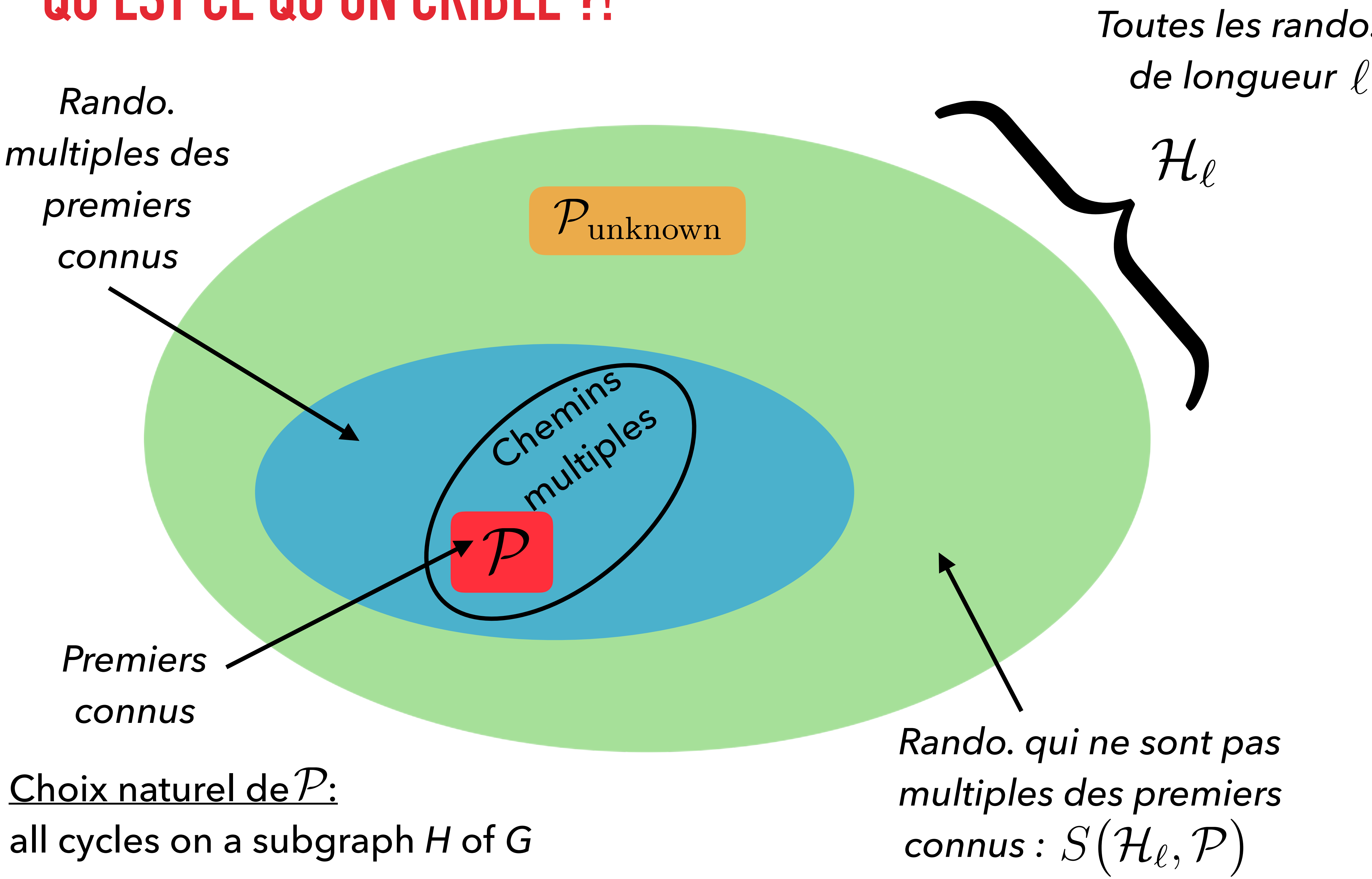


Combien de chemins multiples d'un SAP p ?

PLAN

- Un vieux problème
  - *Motivation originelle*
  - *La route probabiliste*
  - *Les prémisse d'une autre voie*
- Compter les chemins avec des cribles
  - *Qu'est ce qu'un crible ?!*
  - *Graphes finis*
  - *Graphes infinis : valeurs de SLE_2*
  - *Dénombrement des SAPs : premier essai*
- La suite

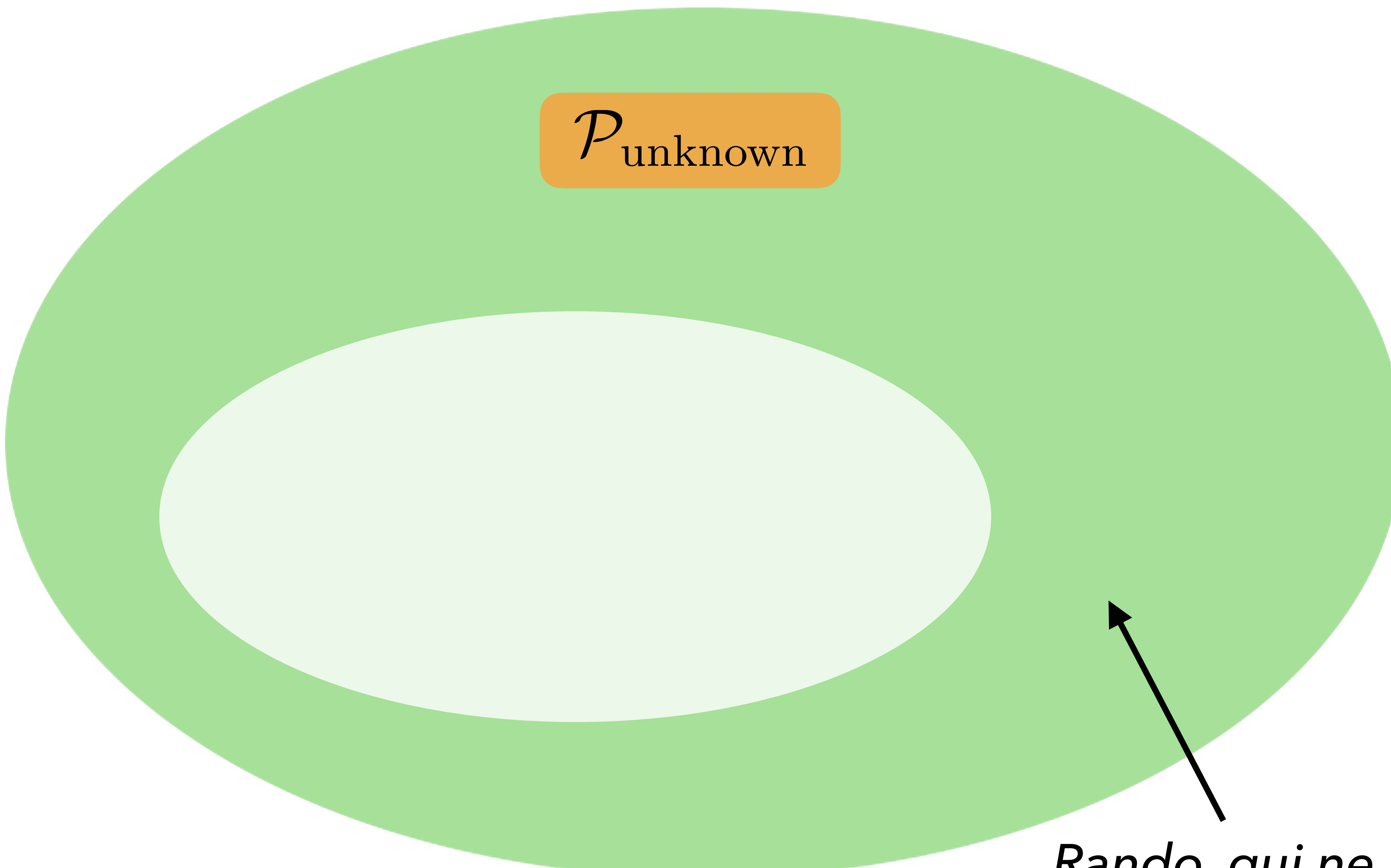
QU'EST CE QU'UN CRIBLE ?!



<u>Choix naturel de $\mathcal{P}$:</u>

all cycles on a subgraph *H* of *G*

QU'EST CE QU'UN CRIBLE ?!



Rando. qui ne sont pas multiples des premiers connus : $S(\mathcal{H}_\ell, \mathcal{P})$

Ce que le crible compte

Chemins multiples d'un SAP p

CRIBLES SUR GRAPHES FINIS

Le crible est une *inclusion-exclusion* dans le poset des rando. ordonnées par divisibilité

Fonction de Möbius des randonnées

$$S(\mathcal{H}_\ell, \mathcal{P}_{G\backslash p}) = \sum_{d \in \mathcal{P}^{s.a}_{G\backslash p}} \mu(d) \big| \mathcal{M}(d)_\ell \big|$$

Nombres de multiples de d de longueur ℓ

Rando auto-évitante sur $G\backslash p$

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~60~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Crible d'Eratosthenes - Legendre

CRIBLES SUR GRAPHES FINIS

Le crible est une *inclusion-exclusion* dans le poset des rando. ordonnées par divisibilité

$$S(\mathcal{H}_\ell, \mathcal{P}_{G\backslash p}) = \sum_{d \in \mathcal{P}^{s.a}_{G\backslash p}} \mu(d) \big| \mathcal{M}(d)_\ell \big|$$

Passons un **paquet** de détails techniques …

CRIBLES SUR GRAPHES FINIS

Le crible est une *inclusion-exclusion* dans le poset des rando. ordonnées par divisibilité

$$S(\mathcal{H}_\ell, \mathcal{P}_{G\backslash p}) = \sum_{d \in \mathcal{P}^{s.a}_{G\backslash p}} \mu(d) \big| \mathcal{M}(d)_\ell \big|$$

Passons un **paquet** de détails techniques …

$$\boxed{S\big(\mathcal{H}_\ell, \mathcal{P}_{G\backslash p}\big) = |\mathcal{H}_\ell| \det\left(\mathsf{I} - \frac{1}{\lambda}\mathsf{A}_{G\backslash p}\right) + \lambda^\ell \sum_{k\geq 1} \frac{\nabla^k[f](\ell)}{\lambda^k k!} \det{}^{(k)}\left(\mathsf{I} - \frac{1}{\lambda}\mathsf{A}_{G\backslash p}\right)}$$

CRIBLES SUR GRAPHES FINIS

Le crible est une *inclusion-exclusion* dans le poset des rando. ordonnées par divisibilité

$$S(\mathcal{H}_\ell, \mathcal{P}_{G\backslash p}) = \sum_{d\in\mathcal{P}^{s.a}_{G\backslash p}} \mu(d)\big|\mathcal{M}(d)_\ell\big|$$

Passons un **paquet** de détails techniques …

$$S\big(\mathcal{H}_\ell, \mathcal{P}_{G\backslash p}\big) = |\mathcal{H}_\ell| \det\left(\mathsf{I} - \frac{1}{\lambda}\mathsf{A}_{G\backslash p}\right) + \lambda^\ell \sum_{k\geq 1} \frac{\nabla^k[f](\ell)}{\lambda^k k!} \det{}^{(k)}\left(\mathsf{I} - \frac{1}{\lambda}\mathsf{A}_{G\backslash p}\right)$$

`Bon terme’** **`Méchant terme’

CRIBLES SUR GRAPHES FINIS

$$\boxed{\frac{S\left(\mathcal{H}_\ell, \mathcal{P}_{G\backslash p}\right)}{|\mathcal{H}_\ell|} \sim \det\left(\mathsf{I} - \frac{1}{\lambda}\mathsf{A}_{G\backslash p}\right)}$$

- **'Bon terme'** entre **0** et **1**, **dominant** quand $\ell \to \infty$

Determinant

Matrice identité

$$\frac{S\left(\mathcal{H}_\ell, \mathcal{P}_{G\backslash p}\right)}{|\mathcal{H}_\ell|} \sim \det\left(\mathsf{I} - \frac{1}{\lambda}\mathsf{A}_{G\backslash p}\right) \qquad \ell \to \infty$$

Matrice d'adjacence de G\p

Valeur propre dominante de G

- **'Méchant terme'** termes d'erreurs, arbitrairement petit $\ell \gg N$

CRIBLES SUR GRAPHES FINIS

$$\frac{S\big(\mathcal{H}_\ell, \mathcal{P}_{G\backslash p}\big)}{|\mathcal{H}_\ell|} \sim \det\left(\mathsf{I} - \frac{1}{\lambda}\mathsf{A}_{G\backslash p}\right) \qquad \ell \to \infty$$

Signification ?

Fraction de randonnées h telles que hp est un chemin w

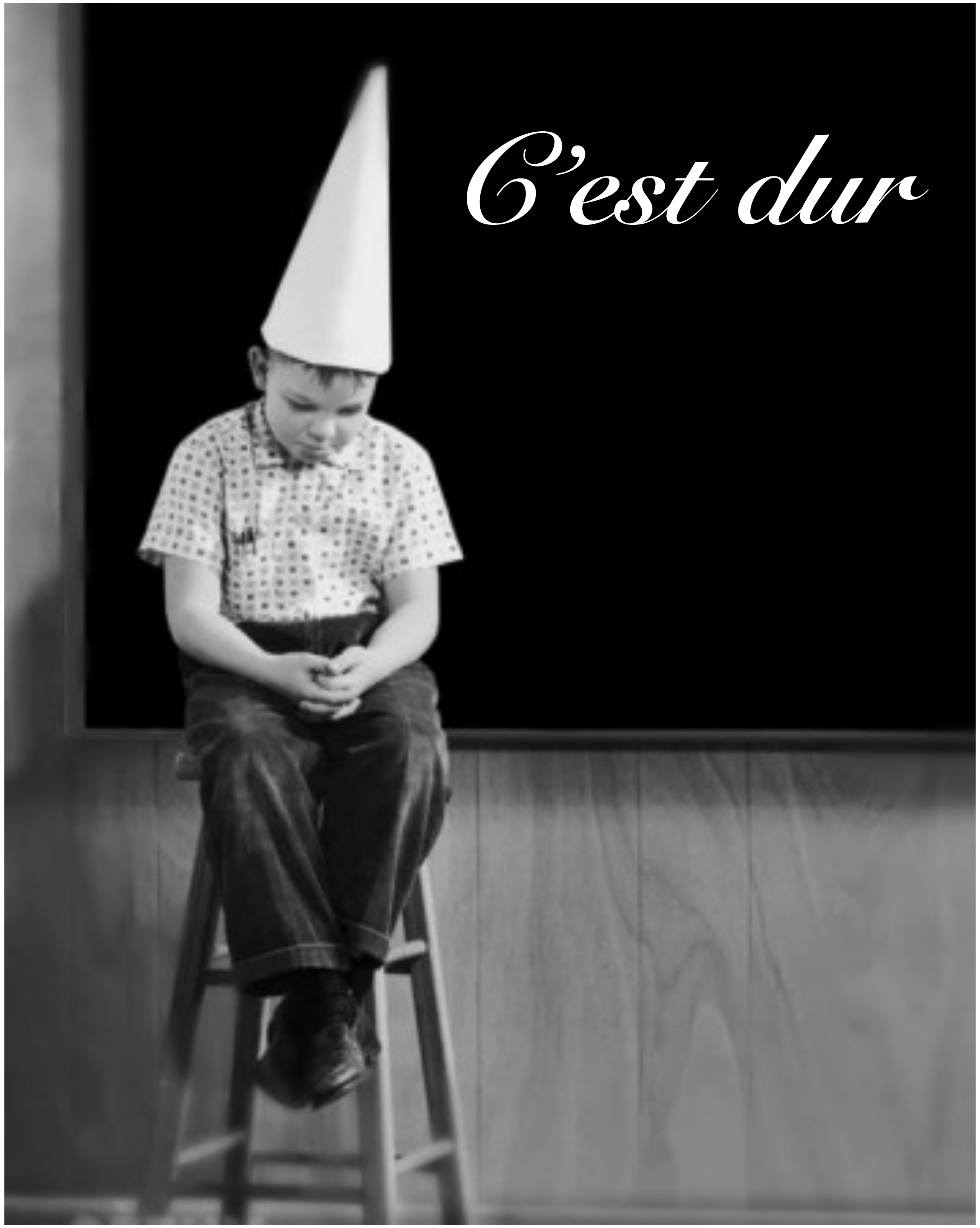
- Cycle p unique diviseur premier à droite de $w = hp$
- Chemin w commence en n'importe quel noeud de p
- Cycle p est la dernière boucle effacée de w

Gros succès *en analyse de réseaux !*

PLAN

- Un vieux problème
  - *Motivation originelle*
  - *La route probabiliste*
  - *Les prémisse d'une autre voie*
- Compter les chemins avec des cribles
  - *Qu'est ce qu'un crible ?!*
  - *Graphes finis*
  - *Graphes infinis : valeurs de SLE_2*
  - *Dénombrement des SAPs : premier essai*
- La suite

GRAPHES INFINIS



GRAPHES INFINIS

- Crible fonctionne ! **Bon terme** est **dominant** !

*Fractions de **chemins** multiples du SAP p permis tous les chemins*

$$\boxed{\mathrm{Frac}_p = \frac{1}{\lambda^{\ell(p)}}\, \mathrm{deg}_p^{\mathrm{T}}.\, \mathrm{adj}\left(\mathsf{I} + \frac{1}{\lambda}\mathsf{C.B}_p\right).\, 1}$$

Valeur propre dominante du graphe

Longueur du SAP p

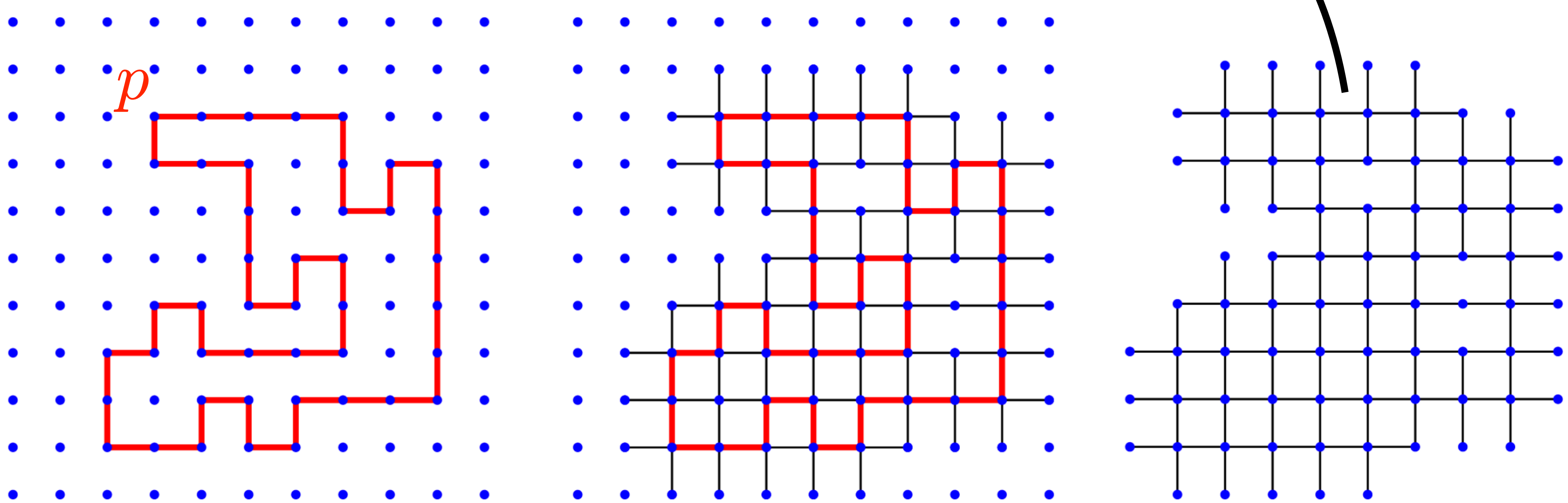
GRAPHES INFINIS

- Crible fonctionne ! **Bon terme** est **dominant** !

*Fractions de **chemins** multiples du SAP p permis tous les chemins*

$$\boxed{\mathrm{Frac}_p = \frac{1}{\lambda^{\ell(p)}}\ \mathrm{deg}_p^{\mathrm{T}} .\, \mathrm{adj}\left(\mathsf{I} + \frac{1}{\lambda}\mathsf{C}.\mathsf{B}_p\right) .\, \mathbf{1}}$$

Matrix d'adjacence



GRAPHES INFINIS

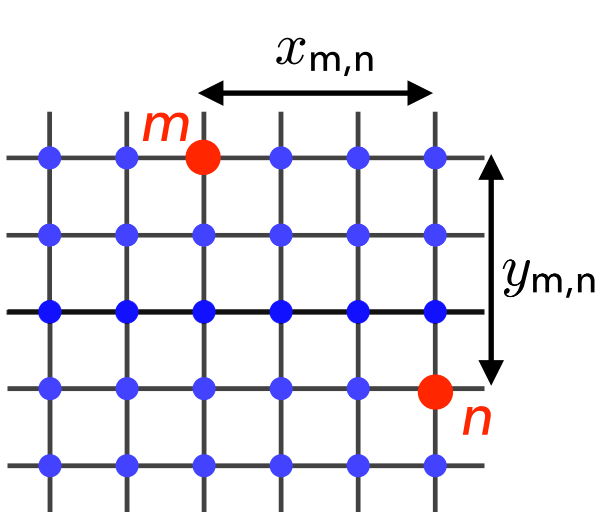
- Crible fonctionne ! **Bon terme** est **dominant** !

Fractions de ***chemins*** *multiples du SAP p permis tous les chemins*

$$\boxed{\mathrm{Frac}_p = \frac{1}{\lambda^{\ell(p)}}\ \mathrm{deg}_p^{\mathrm{T}}.\,\mathrm{adj}\left(\mathsf{I} + \frac{1}{\lambda}\mathsf{C}.\mathsf{B}_p\right).\,\mathbf{1}}$$

C dépend du graphe, e.g. réseau carré:

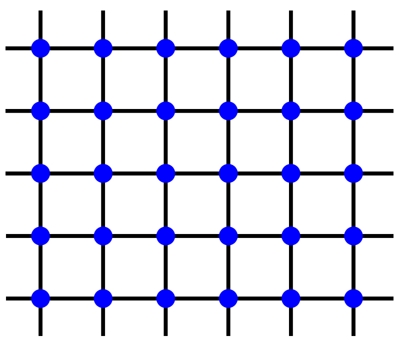
$$\mathsf{C}_{m,n} = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{\tau}\left(1-\left(\frac{\tau-i}{\tau+i}\right)^{x_{m,n}-y_{m,n}}\left(\frac{\tau-1}{\tau+1}\right)^{x_{m,n}+y_{m,n}}\right)d\tau$$



Valide sur tous graphes

GRAPHES INFINIS

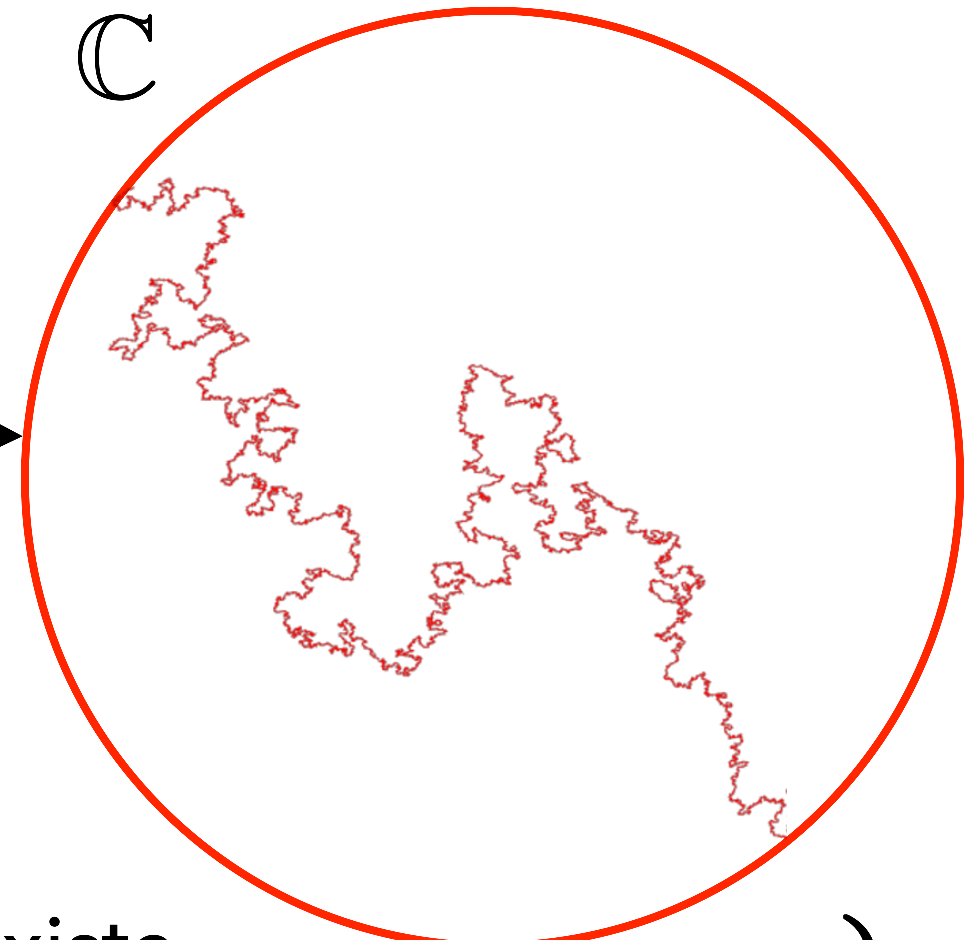
- *Résultats !*



"Scaling limit"

(limite du continu)

$\mathbb{C}$



$\mathrm{Frac}_p \longrightarrow \left.\begin{array}{l}\text{Limite existe}\\ \text{Conformellement invariante}\\ \text{Domain Markov}\end{array}\right\}$ SLE_2

Signification probabiliste ?

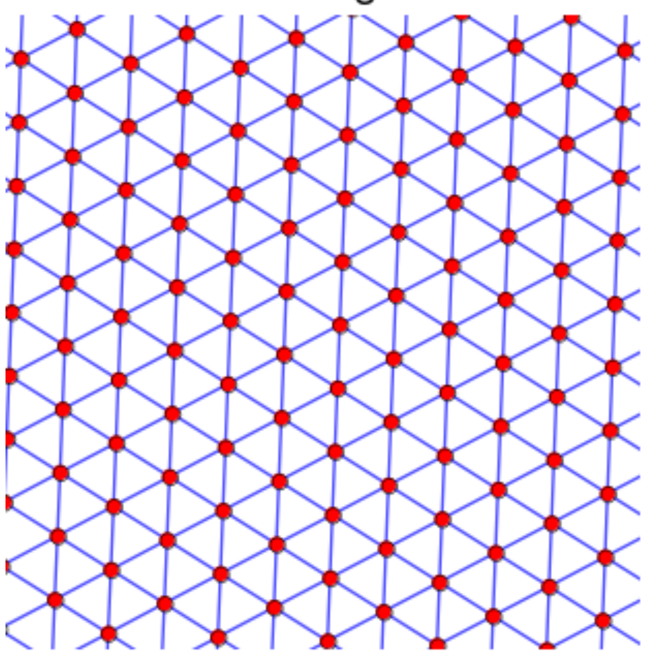
Proba qu'un chemin fermé aléatoire **stoppé** à l'origine efface p en dernier

GRAPHES INFINIS

- *Résultats !*

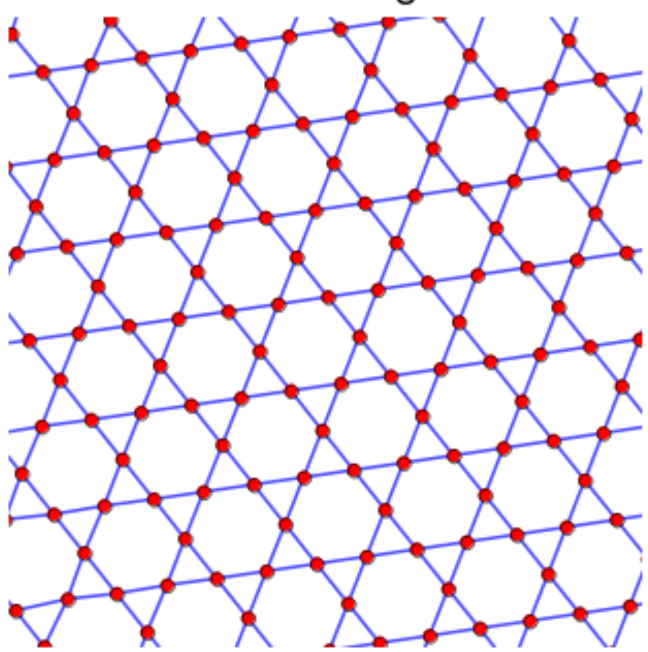
Valeurs prises par SLE_2

Réseau triangulaire



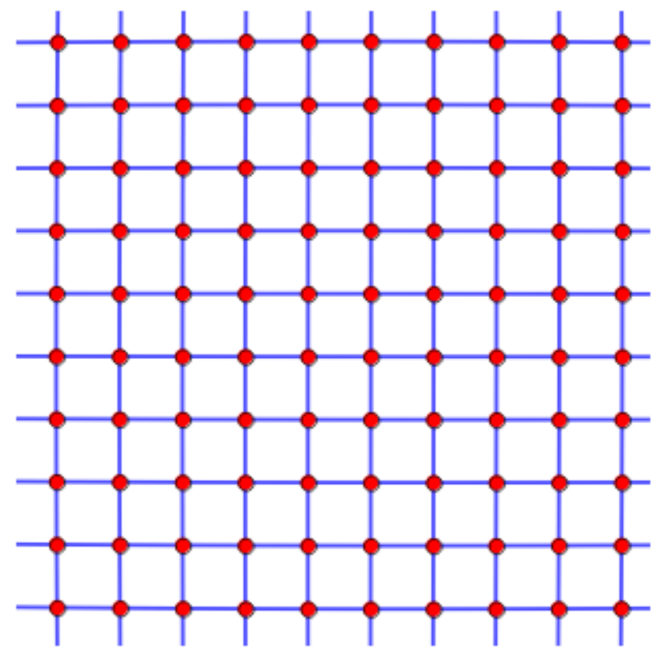
$\mathrm{Frac}_p \in \mathbb{Q}[\sqrt{3}/\pi]$

Réseau de Kagomé



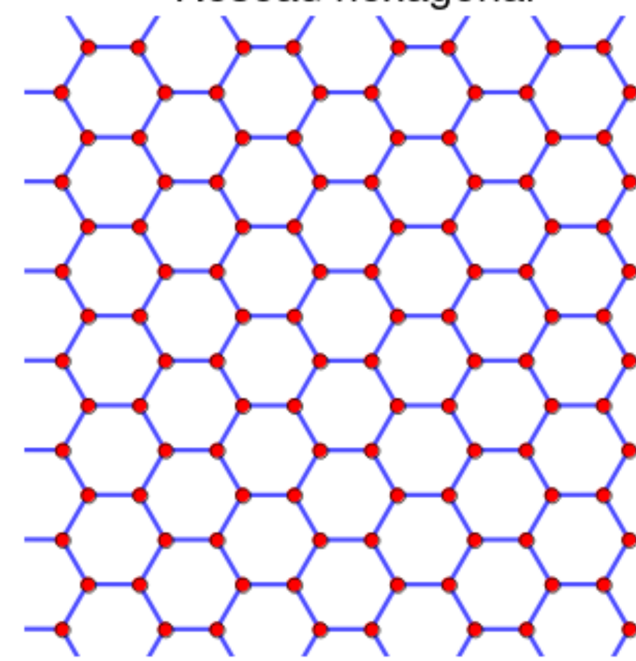
$\mathrm{Frac}_p \in \mathbb{Q}[\sqrt{3}/\pi]$

Réseau carré



$\mathrm{Frac}_p \in \mathbb{Q}[1/\pi]$

Réseau hexagonal



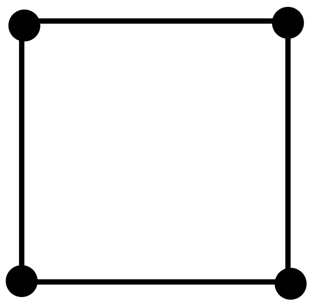
$\mathrm{Frac}_p \in \mathbb{Q}[\sqrt{3}/\pi]$

Sur $\mathbb{Z}^d$

$$\mathrm{Frac}_p \in \mathbb{Q}[1/\pi^{d-1}]$$

GRAPHES INFINIS

- *Exemples !*

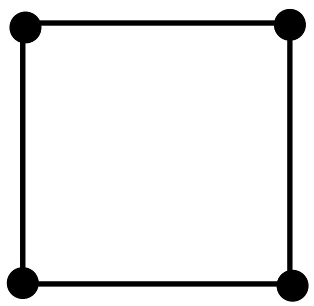


$$\frac{128(\pi - 2)}{4^4 \times \pi^3} \simeq 0.0184$$

1.8% de *tous* les chemins ont
le carré pour dernière boucle effacée

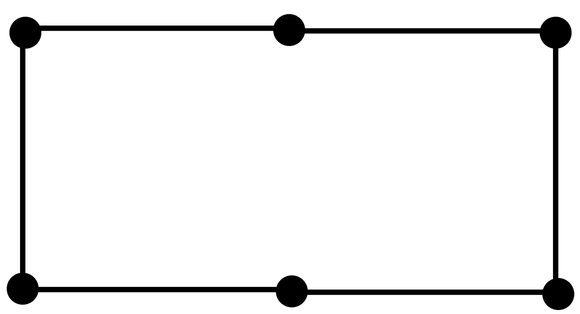
GRAPHES INFINIS

- *Exemples !*

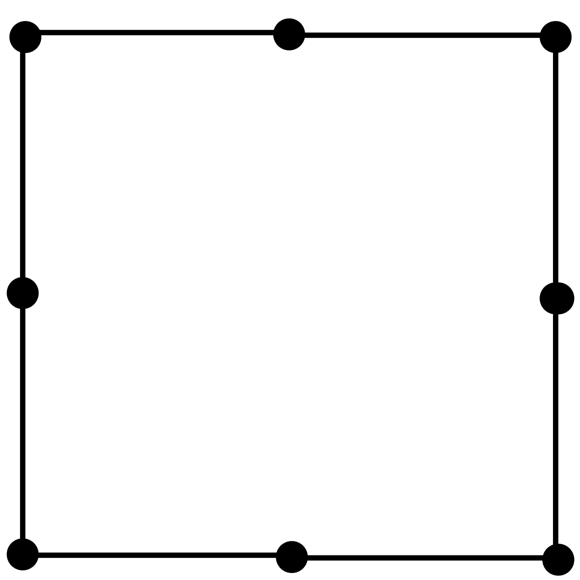


$$\frac{128(\pi-2)}{4^4\times\pi^3}\simeq 0.0184$$

1.8% de *tous* les chemins ont le carré pour dernière boucle effacée



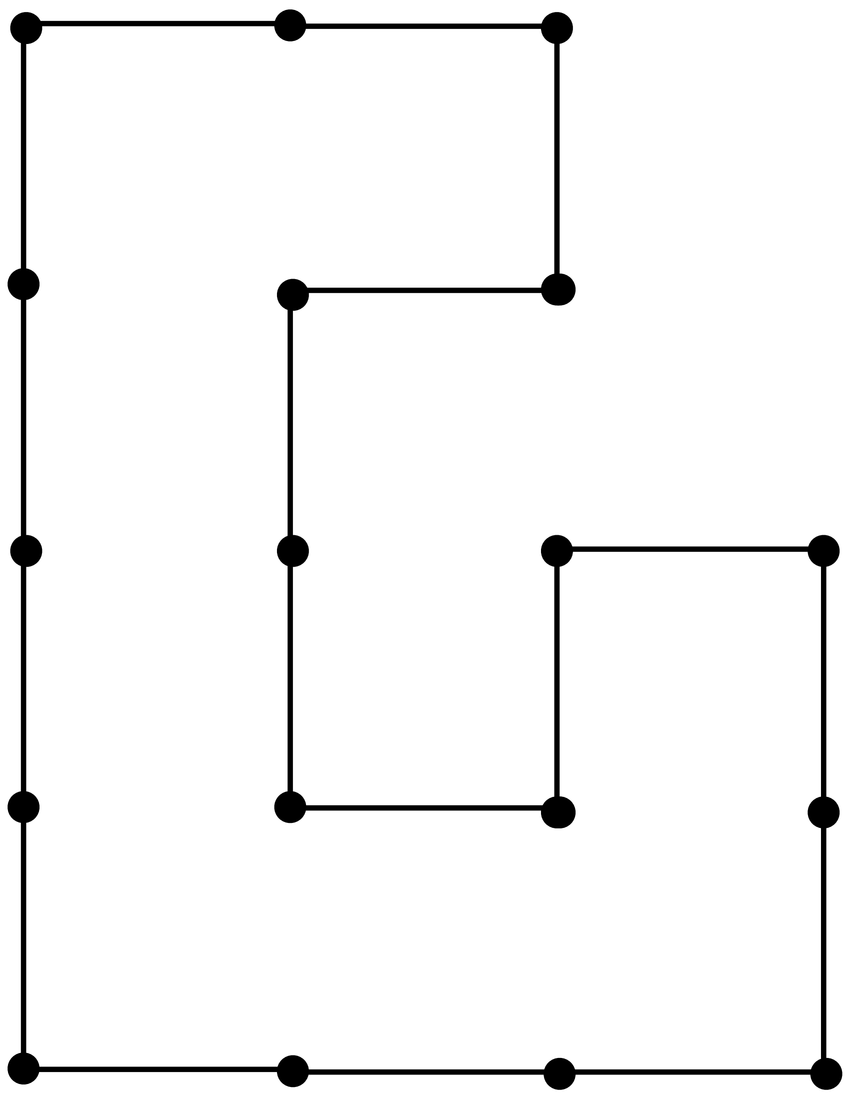
$$\frac{32(\pi-8)(\pi-4)(3\pi-8)(3\pi-4)}{4^6\pi^4}\simeq 0.002585$$



$$\frac{32768(\pi-8)^2(\pi-4)(3\pi-8)^3(9\pi-32)}{4^8\times 81\pi^7}\simeq 0.00044623$$

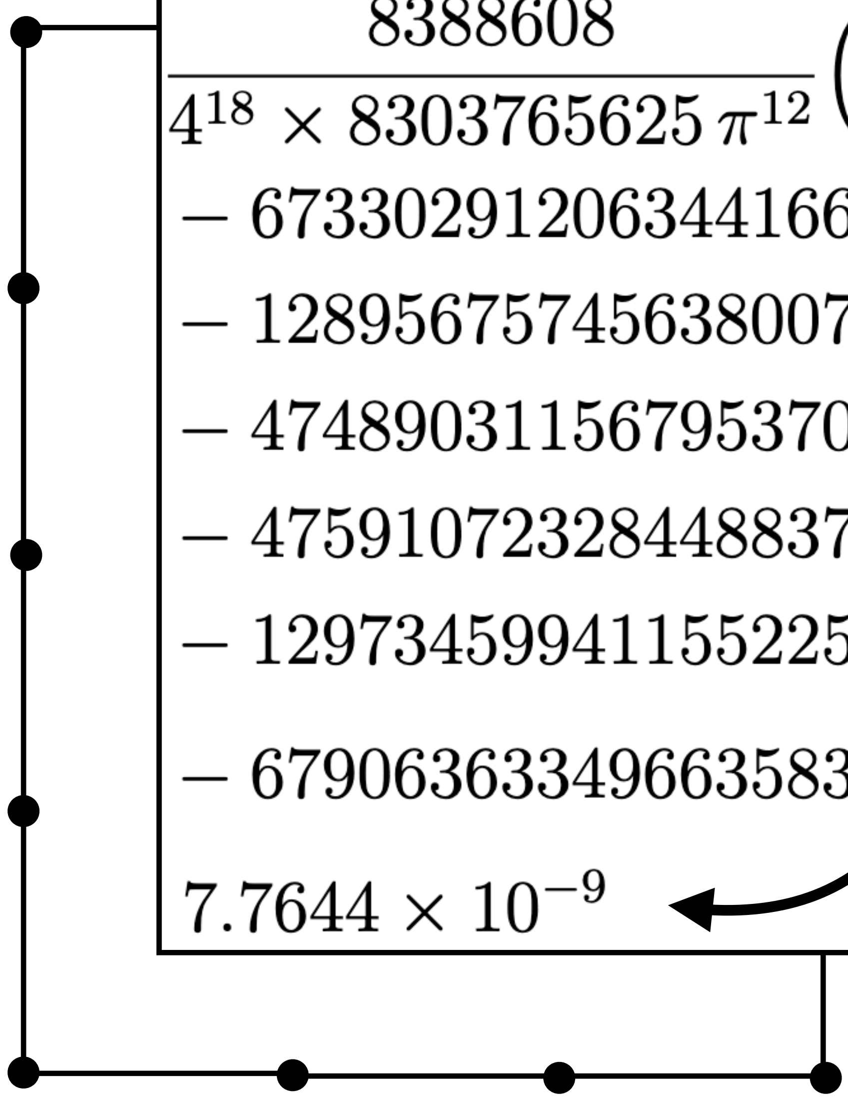
GRAPHES INFINIS

- *Exemples !*



GRAPHES INFINIS

- *Exemples !*



$$\frac{8388608}{4^{18} \times 8303765625\, \pi^{12}} \Big(17215103671312319447815946 24 - 6733029120634416611029155840\pi + 12001725045126647537146527744\pi^2 - 12895675745638007921939841024\pi^3 + 9303982639359984674575220736\pi^4 - 4748903115679537036020154368\pi^5 + 1758418560456019196044640256\pi^6 - 475910723284488375970037760\pi^7 + 93430267561362281294131200\pi^8 - 12973459941155225172708000\pi^9 + 1209211981439562793530000\pi^{10} - 67906363349663583525000\pi^{11} + 1736896666805181140625\pi^{12} \Big),$$

7.7644×10^{-9}

144 738 980 SAPs *analytique*

220 167 804 196 SAPs *numérique*

PLAN

- Un vieux problème
  - *Motivation originelle*
  - *La route probabiliste*
  - *Les prémisse d'une autre voie*
- Compter les chemins avec des cribles
  - *Qu'est ce qu'un crible ?!*
  - *Graphes finis*
  - *Graphes infinis : valeurs de SLE_2*
  - *Dénombrement des SAPs : premier essai*
- La suite

DÉNOMBRER LES SAPS

Chemins longueur $\ell + 1$

SAP longueur $\ell + 1$

Chemins longueur $\ell + 1$ *multiples de SAP de longueur* $L \leq \ell$

$$\lambda^{\ell+1}/(\ell+1)$$

$$\lambda^{\ell+1} \sum_{\substack{p \text{ SAP} \\ \ell(p) \leq \ell}} \mathrm{Frac}_p$$

$$\lambda^{\ell+1}\ell^{-13/5}$$

DÉNOMBRER LES SAPS

Chemins longueur $\ell+1$

SAP longueur $\ell+1$

Chemins longueur $\ell+1$ *multiples de SAP de longueur* $L \leq \ell$

$$\lambda^{\ell+1}/(\ell+1)$$

$$\lambda^{\ell+1} \sum_{\substack{p \text{ SAP} \\ \ell(p) \leq \ell}} \mathrm{Frac}_p$$

$$\lambda^{\ell+1} \ell^{-13/5}$$

très loin de μ

très proche de -5/2…

- Accumulation de **'méchants termes'** d'erreurs: SAPs longs $L \simeq \ell$

DÉNOMBRER LES SAPS

Chemins longueur $\ell + 1$

SAP longueur $\ell + 1$

Chemins longueur $\ell + 1$ *multiples de SAP de longueur* $L \leq \ell$

$$\lambda^{\ell+1}/(\ell+1)$$

$$\lambda^{\ell+1} \sum_{\substack{p \text{ SAP} \\ \ell(p) \leq \ell}} \mathrm{Frac}_p$$

$$\lambda^{\ell+1} \ell^{-13/5}$$

très loin de μ

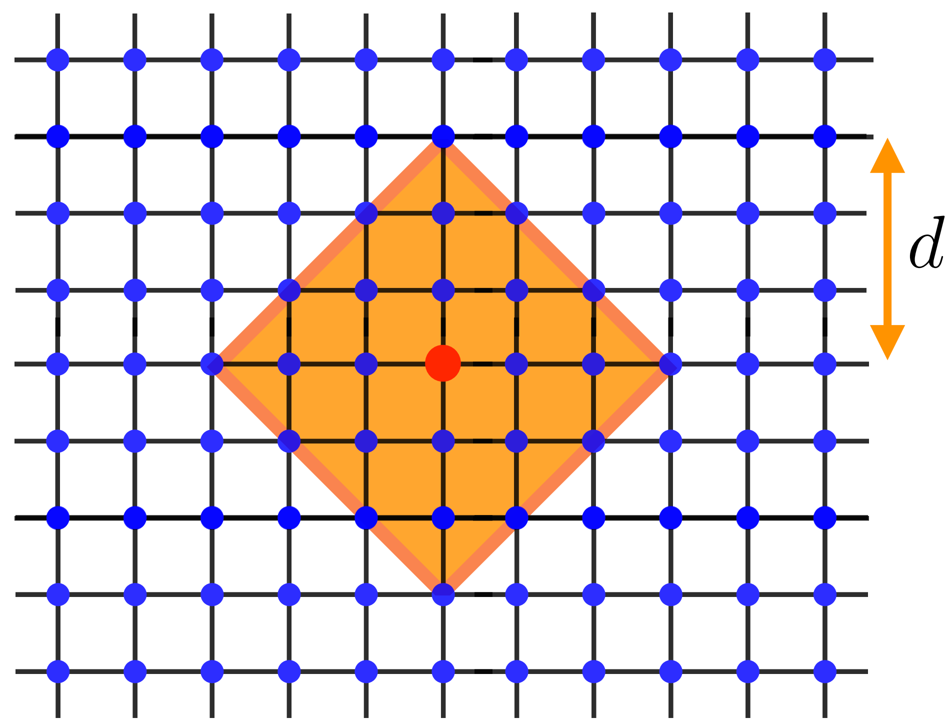
très proche de -5/2…

- Aucun soucis si longs SAPs : $L < \ell/c$

DÉNOMBRER LES SAPS

$$w = [\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n]\, h\, p$$

- **Cribles à gauche :** première boucle effacée
- Chemins commencent par un long SAW



$$4^\ell \alpha^{d^2} \longrightarrow d \sim \sqrt{\pi \ell}$$

$$\frac{1}{4} e^{4C/\pi} \simeq 0.802$$

MERCI

Fonds :

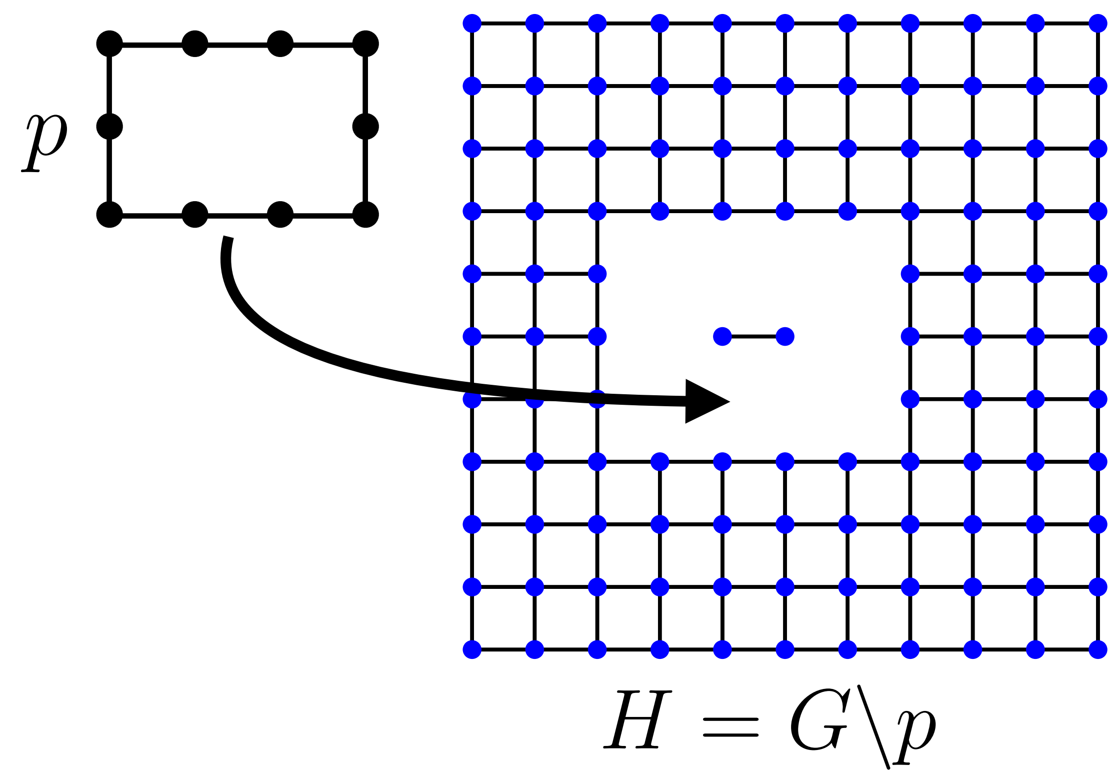
ANR JCJC ALCOHOL : ANR-19-CE40-0006

ANR MAGICA : ANR-20-CE29-0007

WHAT IS A SIEVE ?!

A sieve counts ***hikes*** *which are* ***not*** *multiples of any cycle on subgraph H*

- Pick $H = G\backslash p$
- So h is counted by the sieve if it is not a multiple of cycles on $G\backslash p$



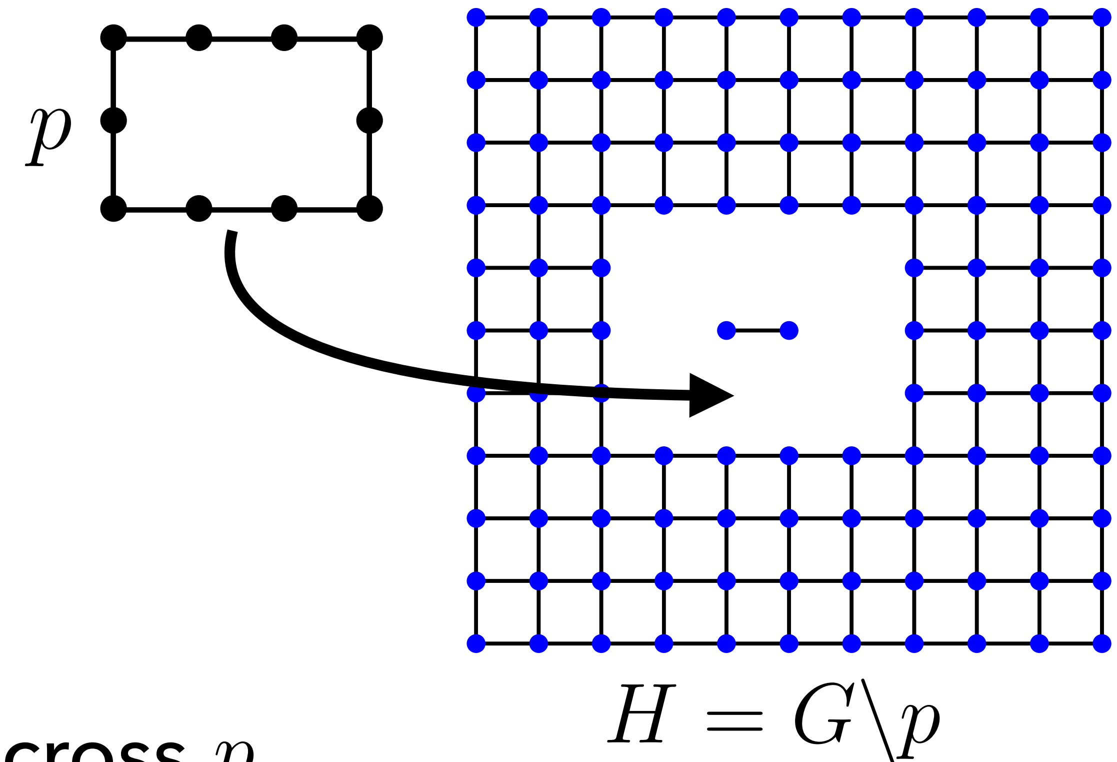
WHAT IS A SIEVE ?!

*A sieve counts **hikes** which are **not** multiples of any cycle on subgraph H*

- Pick $H = G\backslash p$

- So h is counted by the sieve if it is not a multiple of cycles on $G\backslash p$

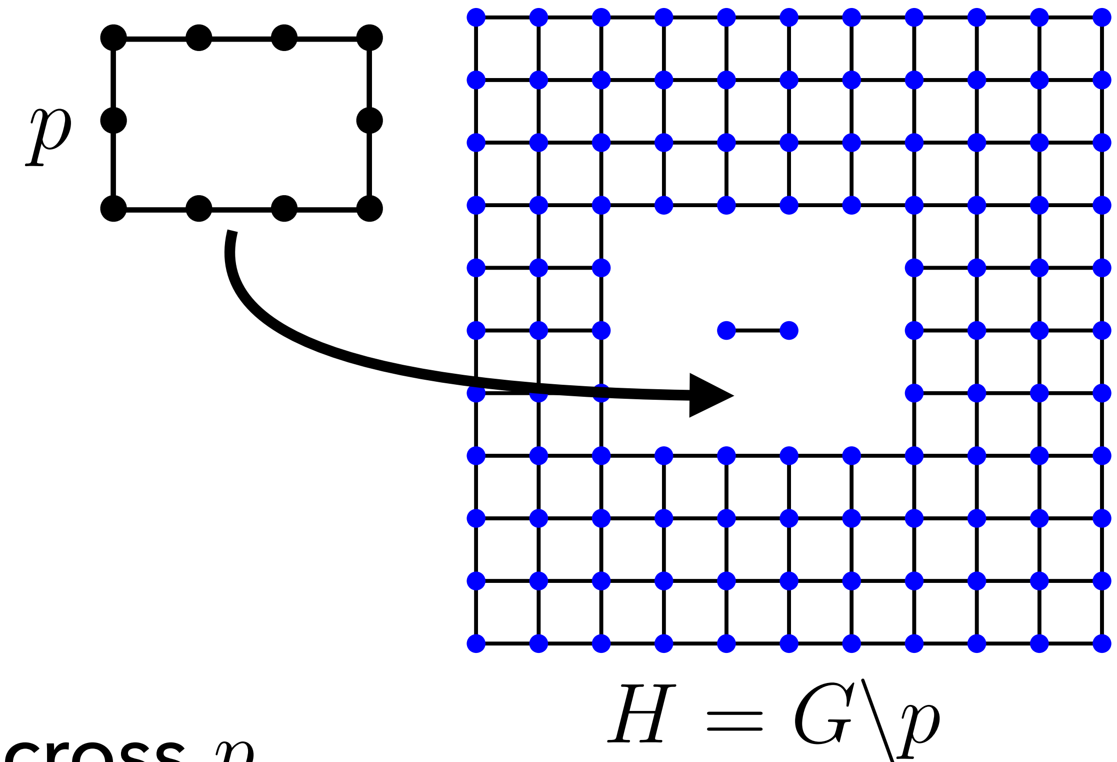
- Hence h is a multiple of cycles that are on G but not $G\backslash p$: such cycles cross p



WHAT IS A SIEVE ?!

A sieve counts ***hikes*** *which are* ***not*** *multiples of any cycle on subgraph H*

- Pick $H = G\backslash p$
- So h is counted by the sieve if it is not a multiple of cycles on $G\backslash p$
- Hence h is a multiple of cycles that are on G but not $G\backslash p$: such cycles cross p
- Thus p commutes with none of the right divisors of h i.e. $w = hp$ is a walk !



On $G\backslash p$ the sieve counts the walk multiples of p