Expressions booléennes aléatoires et fonctions booléennes

Antoine GENITRINI

PRiSM,
Université de Versailles St-Quentin-en-Yvelines

12 Janvier 2010

Contexte

Problématique

- Définition d'un système logique :
  construction d'expressions booléennes

Problématique

- Définition d’un système logique :
  construction d’expressions booléennes

- Choix d’un modèle probabiliste concernant les expressions

Problématique

- Définition d'un système logique :
  construction d'expressions booléennes

- Choix d'un modèle probabiliste concernant les expressions

- On tire aléatoirement une expression booléenne :

Problématique

- Définition d'un système logique :
  construction d'expressions booléennes

- Choix d'un modèle probabiliste concernant les expressions

- On tire aléatoirement une expression booléenne :

  Quelle est la distribution de probabilité induite sur l'ensemble des fonctions booléennes ?

Problématique

- Définition d'un système logique :
  construction d'expressions booléennes
- Choix d'un modèle probabiliste concernant les expressions
- On tire aléatoirement une expression booléenne :

  Quelle est la distribution de probabilité induite sur l'ensemble des fonctions booléennes ?

  Quelle est la structure "typique" d'une expression représentant une fonction fixée ?

Tautologies
dans le système de l’implication

Expressions booléennes

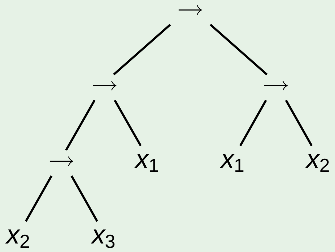
- Un ensemble de variables : $\{x_1, \ldots, x_k\}$

Expressions booléennes

- Un ensemble de variables : $\{x_1, \ldots, x_k\}$
- Un unique connecteur binaire : $\to$

Expressions booléennes

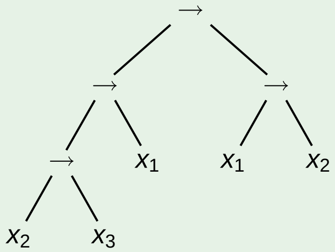
- Un ensemble de variables : $\{x_1, \ldots, x_k\}$
- Un unique connecteur binaire : $\longrightarrow$
  - représentation sous forme d'arbre planaire de $((x_2 \to x_3) \to x_1) \to (x_1 \to x_2)$



  - **taille d'une expression** : nombre de feuilles

Expressions booléennes

- Un ensemble de variables : $\{x_1, \ldots, x_k\}$
- Un unique connecteur binaire : $\rightarrow$
  - représentation sous forme d'arbre planaire de $((x_2 \rightarrow x_3) \rightarrow x_1) \rightarrow (x_1 \rightarrow x_2)$



  - **taille d'une expression** : nombre de feuilles
- L'ensemble des expressions sur k variables : $\mathcal{E}_k$

Fonctions booléennes

- Chaque expression calcule une fonction booléenne

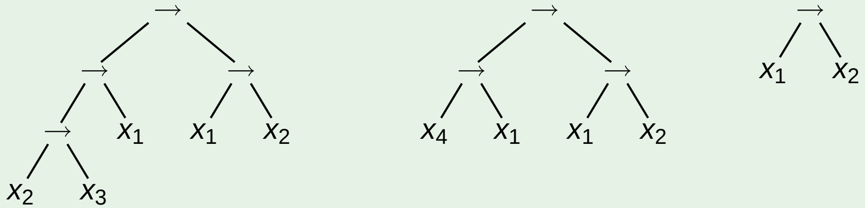
Fonctions booléennes

- Chaque expression calcule une fonction booléenne
- Mais une **infinité** d'expressions calculent la même fonction

Fonctions booléennes

- Chaque expression calcule une fonction booléenne
- Mais une **infinité** d'expressions calculent la même fonction

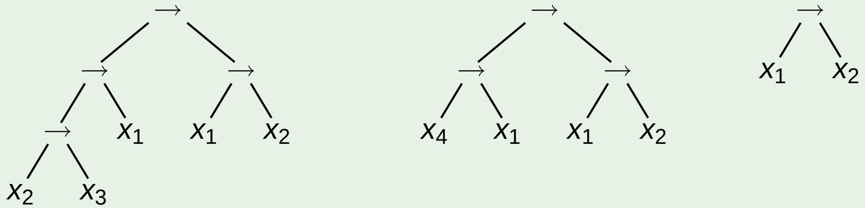
$$((x_2 \rightarrow x_3) \rightarrow x_1) \rightarrow (x_1 \rightarrow x_2) \sim (x_4 \rightarrow x_1) \rightarrow (x_1 \rightarrow x_2) \sim x_1 \rightarrow x_2$$



Fonctions booléennes

- Chaque expression calcule une fonction booléenne
- Mais une **infinité** d'expressions calculent la même fonction

$$((x_2 \to x_3) \to x_1) \to (x_1 \to x_2) \sim (x_4 \to x_1) \to (x_1 \to x_2) \sim x_1 \to x_2$$

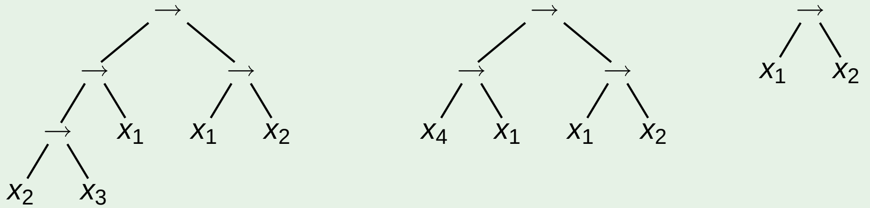


- L'ensemble des fonctions sur k variables : $\mathcal{F}_k$

Fonctions booléennes

- Chaque expression calcule une fonction booléenne
- Mais une **infinité** d'expressions calculent la même fonction

$$((x_2 \to x_3) \to x_1) \to (x_1 \to x_2) \sim (x_4 \to x_1) \to (x_1 \to x_2) \sim x_1 \to x_2$$



- L'ensemble des fonctions sur k variables : $\mathcal{F}_k$
- Le système de l'implication n'est pas complet.

Modèle des *grands arbres*

- $\mathcal{A}_k$ un sous-ensemble de $\mathcal{E}_k$
- $\mathcal{A}_k(n)$ l'ensemble des expressions de $\mathcal{A}_k$ et de taille n

[Lefman, Savický. *Some typical properties of large And/Or boolean formulas*, 1997]
[Chauvin, Flajolet, Gardy, Gittenberger. *And/Or trees revisited*, 2004]

Modèle des *grands arbres*

- $\mathcal{A}_k$ un sous-ensemble de $\mathcal{E}_k$
- $\mathcal{A}_k(n)$ l'ensemble des expressions de $\mathcal{A}_k$ et de taille n
- **Fraction limite de $\mathcal{A}_k$:**

$$\mu_k(\mathcal{A}_k) = \lim_{n\to\infty} \frac{\#\mathcal{A}_k(n)}{\#\mathcal{E}_k(n)},$$

lorsque la limite existe.

[Lefman, Savický. *Some typical properties of large And/Or boolean formulas*, 1997]

[Chauvin, Flajolet, Gardy, Gittenberger. *And/Or trees revisited*, 2004]

Modèle des *grands arbres*

- Fraction limite de $\mathcal{A}$:

$$\mu_k(\mathcal{A}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\#\mathcal{A}(n)}{\#\mathcal{E}_k(n)},$$

  lorsque la limite existe.

- Soient $f \in \mathcal{F}_k$ et $\mathcal{A}_f$ l'ensemble des expressions la calculant :

$$\mu_k(f) = \mu_k(\mathcal{A}_f).$$

Modèle des *grands arbres*

- Fraction limite de $\mathcal{A}$:

$$\mu_k(\mathcal{A}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\#\mathcal{A}(n)}{\#\mathcal{E}_k(n)},$$

  lorsque la limite existe.

- Soient $f \in \mathcal{F}_k$ et $\mathcal{A}_f$ l'ensemble des expressions la calculant :

$$\mu_k(f) = \mu_k(\mathcal{A}_f).$$

- Utilisation des outils de combinatoire analytique :

Modèle des *grands arbres*

- Fraction limite de $\mathcal{A}$:

$$\mu_k(\mathcal{A}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\#\mathcal{A}(n)}{\#\mathcal{E}_k(n)},$$

lorsque la limite existe.

- Soient $f \in \mathcal{F}_k$ et $\mathcal{A}_f$ l'ensemble des expressions la calculant :

$$\mu_k(f) = \mu_k(\mathcal{A}_f).$$

- Utilisation des outils de combinatoire analytique :
  Le théorème de Drmota-Lalley-Woods dit que

  $\mu_k(\cdot)$ est une distribution de probabilité sur $\mathcal{F}_k$.

Modèle des *grands arbres*

- Fraction limite de $\mathcal{A}$:

$$\mu_k(\mathcal{A}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\#\mathcal{A}(n)}{\#\mathcal{E}_k(n)},$$

lorsque la limite existe.

- Soient $f \in \mathcal{F}_k$ et $\mathcal{A}_f$ l'ensemble des expressions la calculant :

$$\mu_k(f) = \mu_k(\mathcal{A}_f).$$

- Utilisation des outils de combinatoire analytique :
Le théorème de Drmota-Lalley-Woods dit que

$\mu_k(\cdot)$ **est une distribution de probabilité sur** $\mathcal{F}_k$**.**

Ceci reste valide pour de nombreux systèmes logiques.

[Lefman, Savický. *Some typical properties of large And/Or boolean formulas*, 1997]

[Chauvin, Flajolet, Gardy, Gittenberger. *And/Or trees revisited*, 2004]

Tautologies

- Une tautologie est une expression calculant la fonction *Vrai*, **dans une logique donnée**.
- Les tautologies représentent les théorèmes d'une logique donnée.

Logique classique

- La logique classique est la logique usuelle,
- où, par exemple, $P \longrightarrow Q$ est équivalent $\neg P \vee Q$.

Logique Intuitionniste

- Pas de recours au tiers exclu dans les démonstrations

Logique Intuitionniste

- Pas de recours au tiers exclu dans les démonstrations
  - $P \rightarrow Q$ non équivalent à $\neg P \vee Q$

Logique Intuitionniste

- Pas de recours au tiers exclu dans les démonstrations
  - $P \rightarrow Q$ non équivalent à $\neg P \vee Q$
  - arguments utilisés constructifs, démonstration par l'absurde rejetée

Logique Intuitionniste

- Pas de recours au tiers exclu dans les démonstrations
  - $P \rightarrow Q$ non équivalent à $\neg P \vee Q$
  - arguments utilisés constructifs, démonstration par l'absurde rejetée

Il existe deux irrationnels a et b tels que a^b soit rationnel.

Logique Intuitionniste

- Pas de recours au tiers exclu dans les démonstrations
  - $P \to Q$ non équivalent à $\neg P \vee Q$
  - arguments utilisés constructifs, démonstration par l'absurde rejetée

Il existe deux irrationnels a et b tels que a^b soit rationnel.

- si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est irrationnel alors $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $b = \sqrt{2}$ conviennent
- sinon $a = b = \sqrt{2}$.

Logique Intuitionniste

- Pas de recours au tiers exclu dans les démonstrations
  - $P \rightarrow Q$ non équivalent à $\neg P \vee Q$
  - arguments utilisés constructifs, démonstration par l'absurde rejetée

Il existe deux irrationnels a et b tels que a^b soit rationnel.

- si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est irrationnel alors $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $b = \sqrt{2}$ conviennent
- sinon $a = b = \sqrt{2}$.

Tautologies classiques mais non intuitionnistes

- $P \vee \bar{P}$: tiers exclu
- $\neg(\neg P) \rightarrow P$: double négation
- $((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$: loi de Peirce

Problématiques

- On tire aléatoirement une tautologie classique :

Problématiques

- On tire aléatoirement une tautologie classique :

  Quelle est la probabilité que
  cette tautologie soit intuitionniste ?

  Existe-t-il une telle probabilité ?

Problématiques

- On tire aléatoirement une tautologie classique :

  Quelle est la probabilité que
  cette tautologie soit intuitionniste ?

  Existe-t-il une telle probabilité ?

- Si l'on modifie le système de connecteurs :

Problématiques

- On tire aléatoirement une tautologie classique :

  Quelle est la probabilité que
  cette tautologie soit intuitionniste ?

  Existe-t-il une telle probabilité ?

- Si l'on modifie le système de connecteurs :

  Cette probabilité est-elle modifiée ?

Fraction limite

- Cl_k : ensemble des tautologies classiques
- Int_k : ensemble des tautologies intuitionnistes
- $Cl_k(n), Int_k(n)$: expressions de taille n de Cl_k et de Int_k

Fraction limite

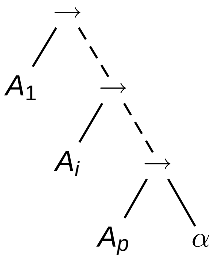
- Cl_k : ensemble des tautologies classiques
- Int_k : ensemble des tautologies intuitionnistes
- $Cl_k(n), Int_k(n)$: expressions de taille n de Cl_k et de Int_k

On s'intéresse à :

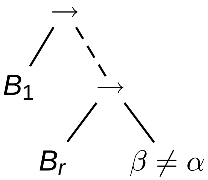
$$\lim_{n \to \infty} \frac{\#Int_k(n)}{\#Cl_k(n)}.$$

Résultats antérieurs

NTS : Ensemble des **Non-Tautologies Simples**



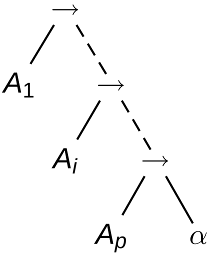
où $\forall\, i,\ A_i$ est de la forme :



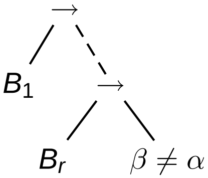
[Moczurad, Tyszkiewicz, Zaionc. *Statistical properties of simple types*, 2000]

Résultats antérieurs

NTS : Ensemble des **Non-Tautologies Simples**



où $\forall\, i,\ A_i$ est de la forme :



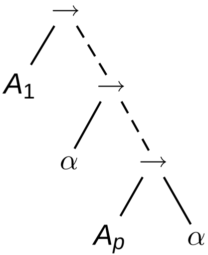
Fraction limite des non-tautologies simples :

$$\mu_k(NTS) = \frac{k(k-1)}{(k+1)^2} = 1 - \frac{3}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

[Moczurad, Tyszkiewicz, Zaionc. *Statistical properties of simple types*, 2000]

Résultats antérieurs

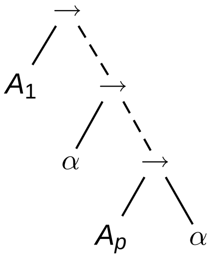
TS : Ensemble des **Tautologies Simples**



[Moczurad, Tyszkiewicz, Zaionc. *Statistical properties of simple types*, 2000]

Résultats antérieurs

TS : Ensemble des **Tautologies Simples**

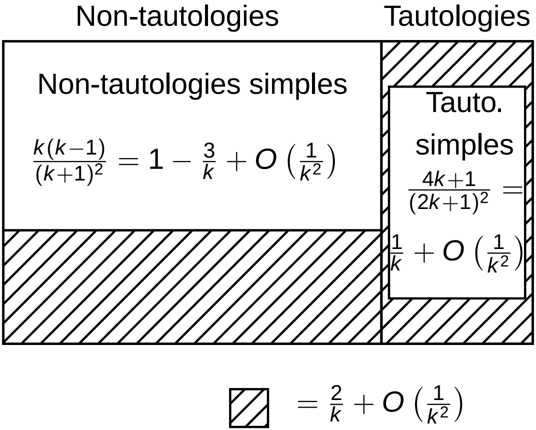


Fraction limite des tautologies simples :

$$\mu_k(TS) = \frac{4k+1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

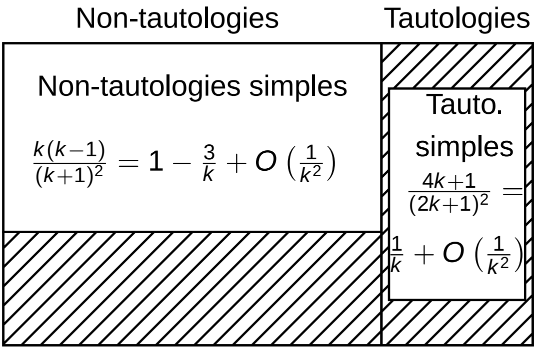
[Moczurad, Tyszkiewicz, Zaionc. *Statistical properties of simple types*, 2000]

Synthèse et conjecture de ces résultats antérieurs



[Moczurad, Tyszkiewicz, Zaionc. *Statistical properties of simple types*, 2000]

Synthèse et conjecture de ces résultats antérieurs



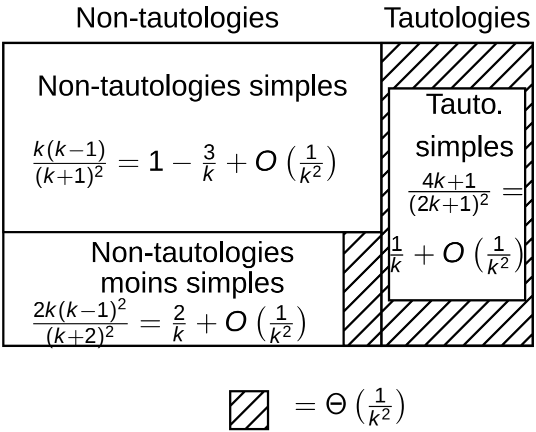
$$= \frac{2}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

Conjecture

Quand k tend vers l'infini, la plupart des tautologies sont simples.

[Moczurad, Tyszkiewicz, Zaionc. *Statistical properties of simple types*, 2000]

Probabilité de la fonction *Vrai*



[Fournier, Gardy, G., Zaionc. *Classical and intuitionistic logic are asymptotically identical*, 2007]

Probabilité de la fonction *Vrai*

TS : Ensemble des tautologies simples

Théorème

- Fraction limite des tautologies simples :

$$\mu_k(TS) = \frac{4k+1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

- Probabilité de *Vrai* :

$$\mu_k(\text{Vrai}) = \mu_k(TS)\left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right)$$

Interprétation : *Asymptotiquement (quand k tend vers l'infini), la plupart des tautologies sont des tautologies simples.*

[Fournier, Gardy, G., Zaionc. *Classical and intuitionistic logic are asymptotically identical*, 2007]

Résultats dans le système de l'implication

Proposition

Une tautologie simple est une tautologie intuitionniste.

Corollaire

Asymptotiquement (quand k tend vers l'infini),
la plupart des tautologies classiques sont intuitionnistes.

$$\lim_{k\to\infty} \liminf_{n\to\infty} \frac{\#Int_k(n)}{\#Cl_k(n)} = \lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \frac{\#Int_k(n)}{\#Cl_k(n)} = 1.$$

Tautologies dans le système propositionnel complet

Système propositionnel complet

- L'ensemble de variables : $\{x_1, \ldots, x_k\}$
- La constante *Faux* représentée par $\perp$

Système propositionnel complet

- L'ensemble de variables : $\{x_1, \ldots, x_k\}$
- La constante *Faux* représentée par $\perp$
- L'ensemble de connecteurs binaires : $\{\rightarrow, \vee, \wedge\}$

Système propositionnel complet

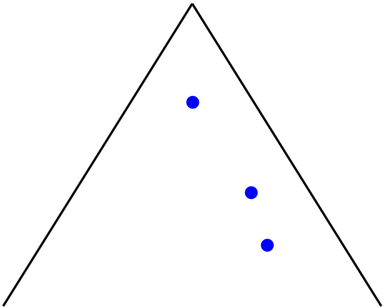
- L'ensemble de variables : $\{x_1, \ldots, x_k\}$
- La constante *Faux* représentée par $\perp$
- L'ensemble de connecteurs binaires : $\{\rightarrow, \vee, \wedge\}$

On s'intéresse à :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\#Int_k(n)}{\#Cl_k(n)}.$$

Feuilles spécifiques

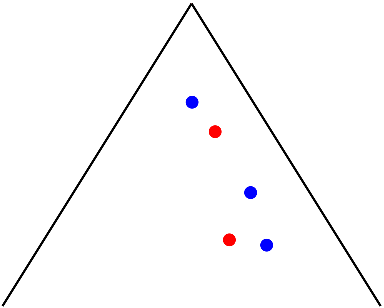
Feuilles positives



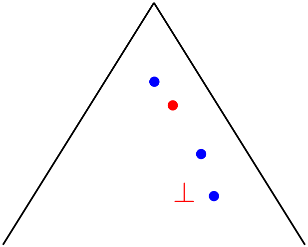
Feuilles spécifiques

Feuilles positives

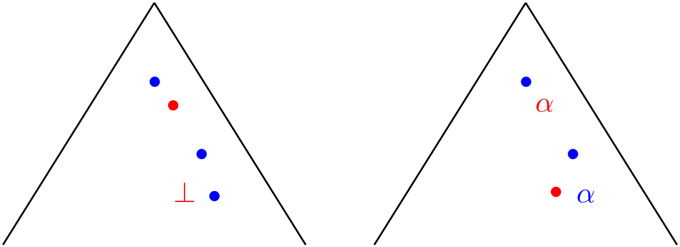
Feuilles négatives



Tautologies simples



Tautologies simples



Théorème

Lorsque k tend vers l'infini,
la plupart des tautologies sont des tautologies simples.

Tautologies simples

Théorème

Lorsque k tend vers l'infini,
la plupart des tautologies sont des tautologies simples.

Théorème

Lorsque k tend vers l'infini,
la proportion des tautologies intuitionnistes est encadrée
par des valeurs tendant vers $5/8$.

[G., Kozik. *Quantitative comparison of Intuitionistic and Classical logics –full propositional system*, 2009]

Systèmes intermédiaires :

- Tant que l'ens. des connecteurs ne contient pas **Ou**, on a :

$$\lim_{k\to\infty} \liminf_{n\to\infty} \frac{\#Int_k(n)}{\#Cl_k(n)} = \lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \frac{\#Int_k(n)}{\#Cl_k(n)} = 1.$$

Systèmes intermédiaires :

- Tant que l'ens. des connecteurs ne contient pas **Ou**, on a :

$$\lim_{k\to\infty} \liminf_{n\to\infty} \frac{\#Int_k(n)}{\#Cl_k(n)} = \lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \frac{\#Int_k(n)}{\#Cl_k(n)} = 1.$$

- si **Ou** fait partie des connecteurs, alors
  - $\{\rightarrow, \vee\}$: les limites sont égales et valent $3/13$
  - $\{\rightarrow, \vee\}$ et $\perp$: les limites sont égales et valent $2/7$
  - $\{\rightarrow, \vee, \wedge\}$: les limites sont égales et valent $5/11$
  - $\{\rightarrow, \vee, \wedge\}$ et $\perp$: les limites sont égales et valent $5/8$

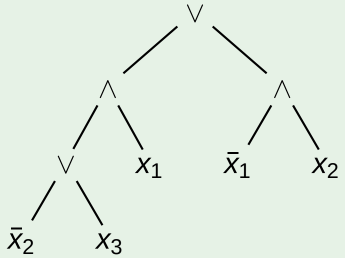
Distribution de probabilité engendrée par le modèle des *grands arbres*

Travaux antérieurs

Application aux arbres *Et*/*Ou* aléatoires

- L'ensemble de littéraux : $\{x_1, \bar{x}_1, \ldots, x_k, \bar{x}_k\}$
- L'ensemble de connecteurs binaires : $\{\wedge, \vee\}$

$((\bar{x}_2 \vee x_3) \wedge x_1) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2)$



Arbres *Et*/*Ou* dans le modèle des *grands arbres*

Soit f une fonction fixée

$L(f)$: **complexité** de f, *i.e. la taille de ses arbres les plus petits*

Arbres *Et*/*Ou* dans le modèle des *grands arbres*

Soit f une fonction fixée

$L(f)$: **complexité** de f, *i.e. la taille de ses arbres les plus petits*

- Bornes sur la probabilité de f

$$e^{-c_0 L(f)/\log(k)} \leqslant \mu_k(f) \leqslant e^{-c_1 L(f)/k^2}\left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right)$$

[Lefman, Savický. *Some typical properties of large And/Or boolean formulas*, 1997]

[Chauvin, Flajolet, Gardy, Gittenberger. *And/Or trees revisited*, 2004]

Peut-on prouver des propriétés similaires dans le système logique de l'implication ?

Système de l'implication

Probabilité des fonctions

Soient f une fonction fixée différente de *Vrai*, et $L(f)$ sa complexité

Théorème

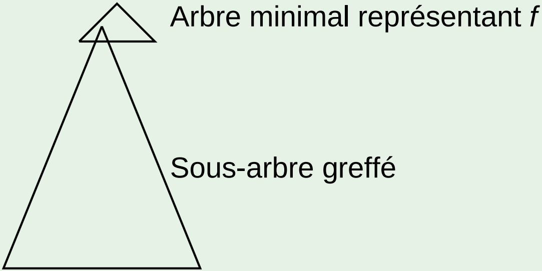
Probabilité de f :

$$\mu_k(f) = \frac{\lambda(f)}{4^{L(f)}\,k^{L(f)+1}} + O\left(\frac{1}{k^{L(f)+2}}\right)$$

[Fournier, Gardy, G., Gittenberger.
Complexity and Limiting Ratio of boolean Functions over Implication, 2008]

Arbre “typique” d’une fonction

Soit f une fonction fixée différente de *Vrai*,
lorsqu’on tire aléatoirement une grande expression représentant f,
elle a presque sûrement la structure suivante :



Idées de la démonstration

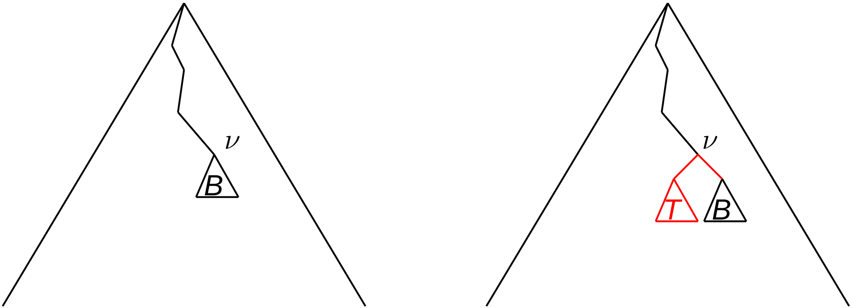
Expansions

Soient f une fonction fixée différente de *Vrai*,
A un arbre la représentant

Expansions

Soient f une fonction fixée différente de *Vrai*,
A un arbre la représentant

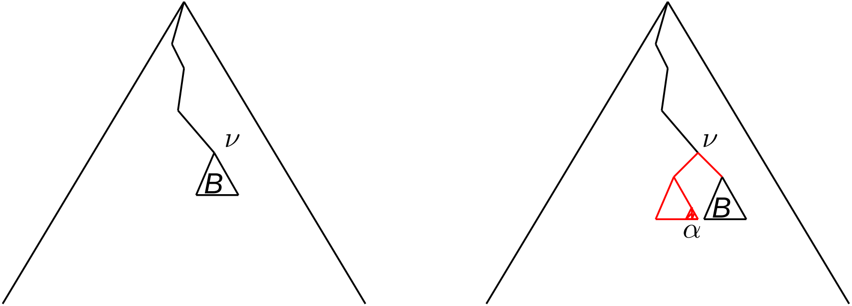
- Quel que soit le noeud ν de A,
  on a une expansion de type "**tautologie**" en ν.



Expansions

Soient f une fonction fixée différente de *Vrai*,
A un arbre la représentant et ν un noeud de A

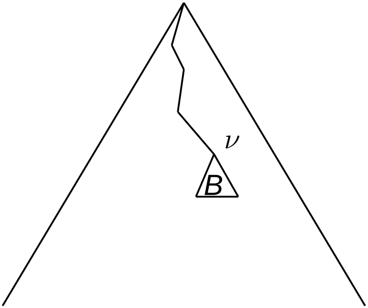
- Expansion de type "tautologie"
- En un noeud ν de A, on a une expansion de type "**but α**", ssi ajouter n'importe quel arbre ayant pour but α en ν construit un arbre représentant toujours f.

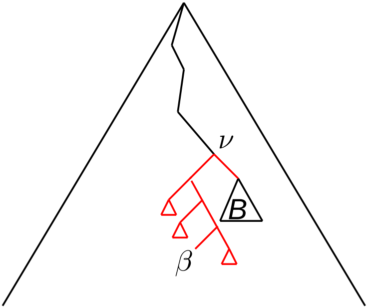


Expansions

Soient f une fonction fixée différente de *Vrai*,
A un arbre la représentant et ν un noeud de A

- Expansion de type “tautologie”
- Expansion de type “but α”
- En un noeud ν de A, on a une expansion de type “**prémisse** β”, ssi ajouter n'importe quel arbre ayant une prémisse β en ν construit un arbre représentant toujours f.





Expansions

Soient f une fonction fixée différente de $Vrai$,
A un arbre la représentant et ν un noeud de A

- Expansion de type “tautologie”
- Expansion de type “but α”
- Expansion de type “prémisse β”

$E(A)$ **: ensemble des arbres obtenus après une expansion de** A

Expansions

Soient f une fonction fixée différente de *Vrai*,
A un arbre la représentant et ν un noeud de A

- Expansion de type “tautologie”
- Expansion de type “but α”
- Expansion de type “prémisse β”

$E(A)$: ensemble des arbres obtenus après une expansion de A

On étend la déf. à toute famille d’arbres $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}_k$: $E(\mathcal{A}) = \cup_{A\in\mathcal{A}} E(A)$.

Expansions

Soient f une fonction fixée différente de *Vrai*,
A un arbre la représentant et ν un noeud de A

- Expansion de type “tautologie”
- Expansion de type “but α”
- Expansion de type “prémisse β”

$E(A)$: ensemble des arbres obtenus après une expansion de A

On étend la déf. à toute famille d'arbres $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}_k$: $E(\mathcal{A}) = \cup_{A \in \mathcal{A}} E(A)$.

Arbres irréductibles de f

Idées de la démonstration

- Calcul de la fraction limite d'une expansion des arbres minimaux
  c'est une borne inférieure de la proba. de f

Idées de la démonstration

- Calcul de la fraction limite d'une expansion des arbres minimaux
  c'est une borne inférieure de la proba. de f
- Calcul de la fraction limite de plusieurs expansions des arbres minimaux

Idées de la démonstration

- Calcul de la fraction limite d'une expansion des arbres minimaux
  c'est une borne inférieure de la proba. de f
- Calcul de la fraction limite de plusieurs expansions des arbres minimaux
- Calcul de la fraction limite des expansions des autres arbres irréductibles
  on obtient une borne supérieure
  on s'arrange pour ne pas compter trop souvent
  les mêmes arbres...

Idées de la démonstration

- Calcul de la fraction limite d'une expansion des arbres minimaux
  c'est une borne inférieure de la proba. de f
- Calcul de la fraction limite de plusieurs expansions des arbres minimaux
- Calcul de la fraction limite des expansions des autres arbres irréductibles
  on obtient une borne supérieure
  on s'arrange pour ne pas compter trop souvent
  les mêmes arbres...

Soit $\lambda(f)$ le nombre d'expansions des arbres de $\mathcal{M}_f$,

$$\mu_k(f) \geqslant \mu_k(E(\mathcal{M}_f)) = \frac{\lambda(f)}{4^{L(f)}\, k^{L(f)+1}} + O\left(\frac{1}{k^{L(f)+2}}\right),$$

$$\mu_k(f) \leqslant \mu_k(E(\mathcal{M}_f))\left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right).$$

Probabilités et autres modèles d'expressions aléatoires

Modèle des *arbres de Galton Watson décorés*

Dans ce modèle, la taille de l'expression est aléatoire.

Modèle des *arbres de Galton Watson décorés*

Dans ce modèle, la taille de l'expression est aléatoire.

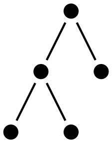
Distribution de probabilité sur les arbres définie par un processus de Galton Watson critique que l'on étiquette aléatoirement.

Modèle des *arbres de Galton Watson décorés*

Dans ce modèle, la taille de l'expression est aléatoire.

Distribution de probabilité sur les arbres définie par un processus de Galton Watson critique que l'on étiquette aléatoirement.

- chaque noeud a une arité 0 ou 2 (uniformément) aléatoire et indép. de celles des autres noeuds



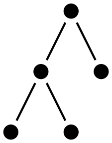
Proba : $\frac{1}{2^5}$

Modèle des *arbres de Galton Watson décorés*

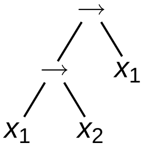
Dans ce modèle, la taille de l'expression est aléatoire.

Distribution de probabilité sur les arbres définie par un processus de Galton Watson critique que l'on étiquette aléatoirement.

- chaque noeud a une arité 0 ou 2 (uniformément) aléatoire et indép. de celles des autres noeuds
- chaque noeud est étiqueté de manière aléatoire, indép. et uniforme



Proba : $\frac{1}{2^5}$



Proba : $\frac{1}{2^5} \times \frac{1}{k^3}$

[Chauvin, Flajolet, Gardy, Gittenberger. *And/Or trees revisited*, 2004]

Modèle des *arbres de Galton Watson décorés*

- Soit A un arbre, $\pi_k(A)$ est sa probabilité
- **Les arbres sont finis presque sûrement,** donc on peut définir pour $f \in \mathcal{F}_k$

$$\pi_k(f) = \sum_{A \in \mathcal{E}_k \ : \ A \sim f} \pi_k(A).$$

[Chauvin, Flajolet, Gardy, Gittenberger. *And/Or trees revisited*, 2004]

Probabilité des fonctions

Soient $f \in \mathcal{F}_k \setminus \{Vrai\}$, $L(f)$ sa complexité, $\mathcal{M}_f$ ses arbres minimaux

Théorème

- Probabilité de *Vrai* (*TS* : tautologies simples) :

$$\pi_k(Vrai) = \pi_k(TS)\left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right)$$

Probabilité des fonctions

Soient $f \in \mathcal{F}_k \setminus \{Vrai\}$, $L(f)$ sa complexité, $\mathcal{M}_f$ ses arbres minimaux

Théorème

- Probabilité de *Vrai* (*TS* : tautologies simples) :

$$\pi_k(Vrai) = \pi_k(TS)\left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right)$$

- Probabilité de f rappel : grands arbres

$$\pi_k(f) = \pi_k(\mathcal{M}_f)\left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right) \quad \mu_k(f) = \mu_k(E(\mathcal{M}_f))\left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right)$$

Probabilité des fonctions

Soient $f \in \mathcal{F}_k \setminus \{Vrai\}$, $L(f)$ sa complexité, $\mathcal{M}_f$ ses arbres minimaux

Théorème

- Probabilité de *Vrai* (*TS* : tautologies simples) :

$$\pi_k(Vrai) = \pi_k(TS)\left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right)$$

- Probabilité de f

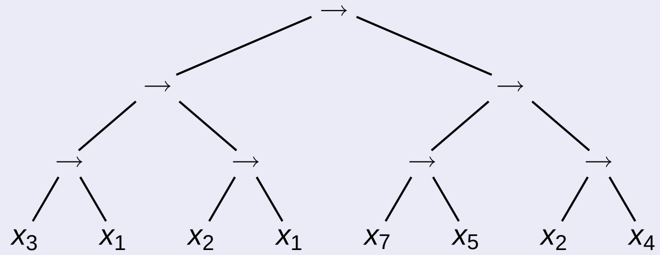
rappel : grands arbres

$$\pi_k(f) = \pi_k(\mathcal{M}_f)\left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right) \qquad \mu_k(f) = \mu_k(E(\mathcal{M}_f))\left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right)$$

Interprétation : *Asymptotiquement (quand k tend vers l'infini), la plupart des arbres calculant f appartiennent à l'ensemble des arbres minimaux de f.*

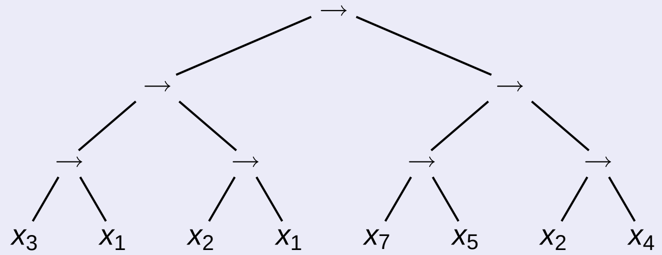
Modèle des *grands arbres équilibrés*

On ne considère plus que les arbres
ayant toutes leurs feuilles au même niveau



Modèle des *grands arbres équilibrés*

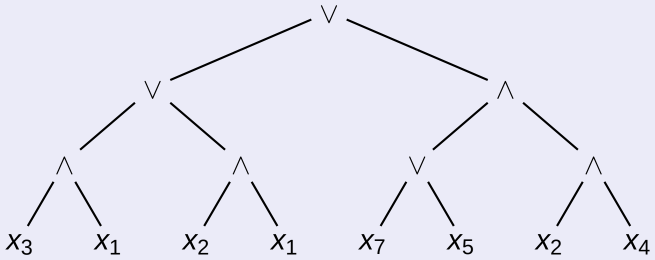
On ne considère plus que les arbres
ayant toutes leurs feuilles au même niveau



- Dans le système de l'implication,
  la distribution limite est concentrée sur *Vrai*

Modèle des *grands arbres équilibrés*

On ne considère plus que les arbres
ayant toutes leurs feuilles au même niveau



- Dans le système de l'implication,
  la distribution limite est concentrée sur *Vrai*
- Dans le système Et/Ou,
  la distribution limite est uniforme sur les fonctions *seuil*

Perspectives et conclusion

Travaux en cours : Effet Shannon

En considérant la distribution uniforme sur $\mathcal{F}_k$, les fonctions ont une complexité valant $O(2^k / \log k)$, presque sûrement.

Travaux en cours : Effet Shannon

En considérant la distribution uniforme sur $\mathcal{F}_k$, les fonctions ont une complexité valant $O(2^k / \log k)$, presque sûrement.

Théorème :

Pour la distribution engendrée par les arbres de Galton Watson décorés, les fonctions sont *read-once* presque sûrement.
(complexité $\leqslant k$)

Travaux en cours : Effet Shannon

En considérant la distribution uniforme sur $\mathcal{F}_k$, les fonctions ont une complexité valant $O(2^k / \log k)$, presque sûrement.

Théorème :

Pour la distribution engendrée par les arbres de Galton Watson décorés, les fonctions sont *read-once* presque sûrement.
(complexité $\leqslant k$)

Théorème :

Pour la distribution engendrée par les grands arbres, les fonctions de complexité au plus k^2 ont une probabilité non nulle –indépendante de k.

Travail en collaboration avec B. Gittenberger

Synthèse et perspectives

- Pour une fonction fixée dans le système de l'implication, pour les deux modèles d'arbres (grands arbres et G.W. décorés)
  nous avons relié les probabilité et complexité de la fonction, quand k tend vers l'infini.

Synthèse et perspectives

- Pour une fonction fixée dans le système de l'implication, pour les deux modèles d'arbres (grands arbres et G.W. décorés)
  nous avons relié les probabilité et complexité de la fonction, quand k tend vers l'infini.

- Cette approche nous permet d'expliquer le fait que le tirage aléatoire d'expressions booléennes donne des fonctions de faible complexité.

Synthèse et perspectives

- Pour une fonction fixée dans le système de l'implication, pour les deux modèles d'arbres (grands arbres et G.W. décorés)
  nous avons relié les probabilité et complexité de la fonction, quand k tend vers l'infini.
- Cette approche nous permet d'expliquer le fait que le tirage aléatoire d'expressions booléennes donne des fonctions de faible complexité.
- Effet Shannon ne s'applique pas à ces modèles.

Synthèse et perspectives

- Pour une fonction fixée dans le système de l'implication, pour les deux modèles d'arbres (grands arbres et G.W. décorés)
  nous avons relié les probabilité et complexité de la fonction, quand k tend vers l'infini.

- Cette approche nous permet d'expliquer le fait que le tirage aléatoire d'expressions booléennes donne des fonctions de faible complexité.

- Effet Shannon ne s'applique pas à ces modèles.

- Nouveau modèle basé sur DAG :
  La partage d'information augmente la probabilité des fonctions de grande complexité.