Énumération de certaines familles de polycubes et convolutions généralisées

Matthieu Deneufchâtel

avec C. Carré, J.-P. Dubernard, J.-G. Luque et O. Mallet

LITIS, Université de Rouen

11 mars 2013

Plan

- Généralisation des polyominos (1+1) en dimension d+1
- Généralisation des partitions planes (2+1) en changeant les contraintes
- Classes particulières obtenues par superposition de plateaux
- Structure algébrique pour les séries génératrices

Empilements connexes et finis de cubes unité en dimension 2+1, définis à translation près et caractérisés par :

- volume v : nombre de cubes
- hauteur h : plus grande valeur de la première coordonnée

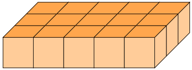
Empilements connexes et finis de cubes unité en dimension 2+1, définis à translation près et caractérisés par :

- volume v : nombre de cubes
- hauteur h : plus grande valeur de la première coordonnée

Notions de

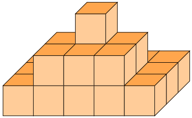
- convexité (anti)-horizontale : intersection avec tout plan horizontal
  $\rightarrow$ polyomino convexe par lignes (resp. colonnes)
- convexité (anti)-verticale : intersection avec tout plan vertical
  $\rightarrow$ polyomino convexe par colonnes (resp. par lignes)
- direction : toute case peut être atteinte à partir de la racine « sans retour en arrière »

Un plateau est un parallélépipède de hauteur 1.

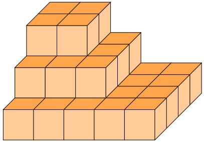


Empilements de plateaux avec contraintes variables :

- pyramides :
  1. si la racine du plateau inférieur est $(0,0,0)$, ses autres cases sont $(0,b,c)$ avec $b,c \geq 0$
  2. si (a,b,c) appartient au plateau $(a+1)$ $(a>0)$, $(a-1,b,c)$ appartient au plateau a

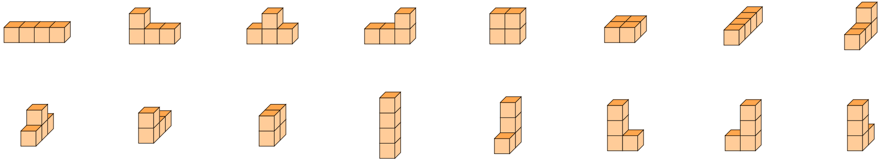


- espaliers :
  - pyramide dont tous les plateaux contiennent $(i,0,0)$



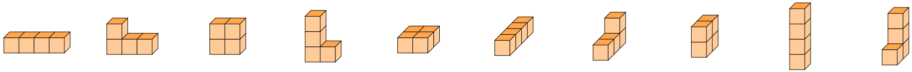
Nombres de pyramides en fonction du volume (A229914 sur l'OEIS) :

$$1, 3, 7, 16, 33, 63, 117, 202, 344, 566, 908, 1419$$



Nombres d'espaliers (A229915 sur l'OEIS) :

$$1, 3, 5, 10, 14, 26, 34, 57, 76, 116, 150, 227$$



Série génératrice d'objets de volumes $v_1, \dots, v_h$:

$\hookrightarrow$ suite de coefficients $a_{v_1,\dots,v_h}$

Si $A = (a_{n_1,\dots,n_h})_{n_1,\dots,n_h \geq 1}$ et $B = (b_{n_1,\dots,n_h})_{n_1,\dots,n_h \geq 1}$,

on note $C = A \star B$ la convolution multivariée de A et B définie par :

$$c_{n_1,\dots,n_h} = \sum_{\substack{n_1 = m_1 p_1 \\ \vdots \\ n_h = m_h p_h}} a_{m_1,\dots,m_h} b_{p_1,\dots,p_h}.$$

$\hookrightarrow$ Structure d'algèbre commutative.

Série génératrice d'objets de volumes $v_1, \ldots, v_h$:

$\hookrightarrow$ suite de coefficients $a_{v_1,\ldots,v_h}$

Si $A = (a_{n_1,\ldots,n_h})_{n_1,\ldots,n_h \geq 1}$ et $B = (b_{n_1,\ldots,n_h})_{n_1,\ldots,n_h \geq 1}$,
on note $C = A \star B$ la convolution multivariée de A et B définie par :

$$c_{n_1,\ldots,n_h} = \sum_{\substack{n_1 = m_1 p_1 \\ \vdots \\ n_h = m_h p_h}} a_{m_1,\ldots,m_h} b_{p_1,\ldots,p_h}.$$

$\hookrightarrow$ Structure d'algèbre commutative. Que peut-on dire des séries génératrices ?

Série génératrice ordinaire et série génératrice de Dirichlet multivariée de $A = (a_{v_1,\dots,v_h})$:

$$S_A^{\mathfrak{D}}(s_1,\dots,s_h) = \sum_{n_1,\dots,n_h \geq 1} \frac{a_{n_1,\dots n_h}}{n_1^{s_1}\dots n_h^{s_h}}$$

On a

$$S_{A\star B}(x_1,\dots,x_h) = \sum_{n_1,\dots,n_h \geq 1} a_{n_1,\dots,n_h} S_B(x_1^{n_1},\dots,x_h^{n_h}) = S_A \star S_B$$

$$S_{A\star B}^{\mathfrak{D}}(s_1,\dots,s_h) = S_A^{\mathfrak{D}}(s_1,\dots,s_h) \cdot S_B^{\mathfrak{D}}(s_1,\dots,s_h).$$

Morphisme entre SGO et SGD ($\sim$ transformation de Mellin) :

$$\mathfrak{D}\left[f\right](s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty f(e^{-x})\, x^{s-1} dx$$

$$\mathfrak{D}\left[x^n\right](s) = \frac{1}{n^s}$$

$$\mathfrak{D}\left[S_{A\star B}\right](s) = \sum_{n\geq 1} b_n \sum_{k\geq 1} a_k \frac{1}{(kn)^s} = S_A^{\mathfrak{D}}(s) \cdot S_B^{\mathfrak{D}}(s)$$

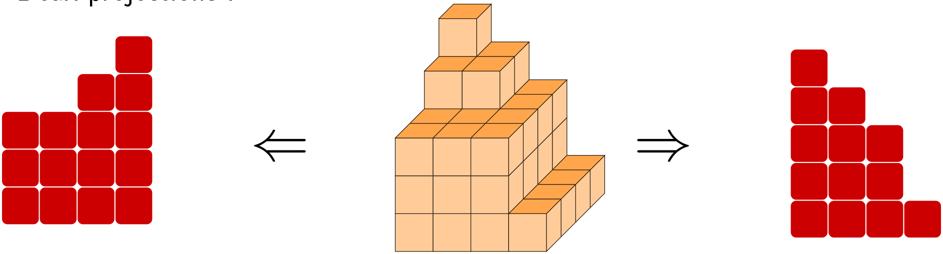
$$(x_1 \ldots x_h \mathbb{C}\left[x_1, \ldots, x_h\right], \star) \overset{\mathfrak{D}}{\hookrightarrow} (\text{ Séries de Dirichlet multivariées}, \cdot)$$

On s'intéresse à la sous-algèbre engendrée par les suites de la forme

$$a_{v_1 \geq \cdots \geq v_h \geq 1}.$$

Plan

Deux projections :



$$\lambda_y(E) = \{(a,b,0),\ (a,b,c) \in E\} \qquad\qquad \lambda_x(E) = \{(a,0,c),\ (a,b,c) \in E\}$$

Multivolume $\mathrm{mv}(E)$: suite des volumes de ses plateaux $\rightarrow$ partition

E_λ désigne l'ensemble des espaliers de multivolume λ
Ordre sur l'ensemble des partitions de hauteur h :

$$\lambda \preceq \mu \Leftrightarrow \exists\, E \in E_\mu \text{ such that } \lambda_x(E) = \lambda$$

Transformation de Lambert de la suite $(a_n)_n$: $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n \frac{q^n}{1-q^n}$.

Généralisation : Transformation de Lambert multivariée

On note $\triangle = (1)_{m_1\geq\cdots\geq m_h\geq 1}$, de série génératrice

$$\frac{x_1\ldots x_h}{(1-x_1)(1-x_1x_2)\ldots(1-x_1\ldots x_h)}$$

On appelle transformation de Lambert multivariée de $(a_n)_n$ la suite

$$T_L(A) = \triangle \star A = (a^{\triangle})$$

(convolution de A avec $\triangle$).

En fait,

$$a^{\triangle}_{n_1,\dots,n_h} = \sum_{(m_1,\dots,m_h)\preceq(n_1,\dots,n_h)} a_{m_1,\dots,m_h}$$

avec (rappel) :

$$(m_1, \dots, m_h) \preceq (n_1, \dots, n_h) \Leftrightarrow \text{ il existe un espalier}$$

- de hauteur h,
- de volume $n_1 + \cdots + n_h$
- dont une projection est donnée par $(m_1, \dots, m_h)$.

Si λ et λ' sont deux partitions de même longueur, on construit un espalier $e_{\lambda,\lambda'} \in E_{\lambda_1\lambda'_1,\dots,\lambda_h{\lambda'}_h}$.

Soit $n^e_{v_1,\dots,v_h}$ $(v_1 \geq \cdots \geq v_h)$ le nombre d'espaliers de hauteur h et volume $v_1 + \cdots + v_h$.

Alors

$$T_L(\triangle) = \triangle^{\star 2} = \left(n^e_{v_1,\dots,v_h}\right)_{v_1 \geq \cdots \geq v_h}$$

Soit $\square = \Big((n_1 - n_2 + 1)\dots(n_{h-1} - n_h + 1)\Big)_{n_1 \geq \cdots \geq n_h \geq 1}$
de série génératrice

$$\sum_{n_1 \geq \cdots \geq n_h \geq 1} (n_1 - n_2 + 1)\dots(n_{h-1} - n_h + 1)\, x_1^{n_1} \dots x_h^{n_h} =$$

$$= \frac{x_1 \dots x_h}{(1-x_1)^2(1-x_1x_2)^2 \dots (1-x_1\dots x_{h-1})^2(1-x_1\dots x_h)}.$$

On définit :

$$\mathrm{T}_\square(A) = \square \star A = (a^\square_{n_1,\dots,n_h})_{n_1 \geq \cdots \geq n_h \geq 1}.$$

On a $\mathrm{T}_\square(A) = (a^\square_{n_1,\dots,n_h})$ avec

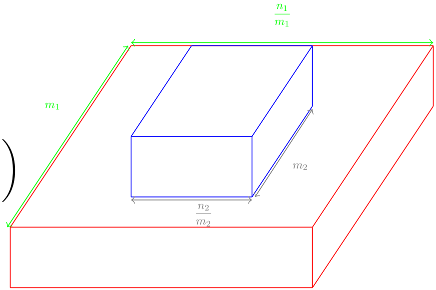
$$a^\square_{n_1,\dots,n_h} = \sum_{(m_1,\dots,m_h)\preceq(n_1,\dots,n_h)} \alpha^{n_1,\dots,n_h}_{m_1,\dots,m_h}\ a_{m_1,\dots,m_h}$$

avec des coefficients

$\alpha^{n_1,\dots,n_h}_{m_1,\dots,m_h} =$

$$\left(\frac{n_1}{m_1} - \frac{n_2}{m_2} + 1\right)\dots\left(\frac{n_{h-1}}{m_{h-1}} - \frac{n_h}{m_h} + 1\right)$$

entiers positifs.



Les pyramides de hauteur h sont en bijection avec les paires de pyramides de hauteur h en dimension 1+1 (partitions).

Si P est la pyramide correspondant à la paire (λ, λ'), alors

$$\mathrm{mv}(P) = (\lambda_1\lambda'_1, \dots, \lambda_h\lambda'_h)$$

Nombre de (1+1)-pyramides de type λ : $(\lambda_1 - \lambda_2 + 1) \dots (\lambda_{h-1} - \lambda_h + 1)$

Soit $n^p_{v_1,\dots,v_h}$ $(v_1 \geq \dots \geq v_h)$ le nombre de pyramides de hauteur h et volume $v_1 + \dots + v_h$.

Alors

$$T_\square(\square) = \square^{\star 2} = \left(n^p_{v_1,\dots,v_h}\right)_{v_1 \geq \dots \geq v_h \geq 1}$$

D'où les séries génératrices :

$\mathcal{E}^e(x_1, \ldots, x_h; h) =$

$$\sum_{n_1 \geq \cdots \geq n_h \geq 1} \frac{x_1^{n_1} \cdots x_h^{n_h}}{(1 - x_1^{n_1})(1 - x_1^{n_1} x_2^{n_2}) \cdots (1 - x_1^{n_1} \cdots x_h^{n_h})}$$

$\mathcal{E}^p(x_1, \ldots, x_h; h) =$

$$\sum_{n_1 \geq \cdots \geq n_h \geq 1} \frac{(n_1 - n_2 + 1) \cdots (n_{h-1} - n_h + 1) x_1^{n_1} \cdots x_h^{n_h}}{(1 - x_1^{n_1})^2 (1 - x_1^{n_1} x_2^{n_2})^2 \cdots (1 - x_1^{n_1} \cdots x_{h-1}^{n_{h-1}})^2 (1 - x_1^{n_1} \cdots x_h^{n_h})}$$

Plan

Le nombre $n^e_{i,j,h,v}$ d'espaliers de hauteur h, volume v dont le dernier plateau a pour volume $i \times j$ est donné par la récurrence :

$$n^e_{i,j,h,v} = \sum_{0 \leq a \leq \frac{i*j*h-v}{(h-1)j}} \quad \sum_{0 \leq b \leq \frac{j(h(i+a)-a)-v}{(i+a)(k-1)}} n^e_{i+a,j+b,h-1,v-ij}$$

Le nombre $n^e_{i,j,h,v}$ d'espaliers de hauteur h, volume v dont le dernier plateau a pour volume $i \times j$ est donné par la récurrence :

$$n^e_{i,j,h,v} = \sum_{0 \leq a \leq \frac{i*j*h-v}{(h-1)j}} \quad \sum_{0 \leq b \leq \frac{j(h(i+a)-a)-v}{(i+a)(k-1)}} n^e_{i+a,j+b,h-1,v-ij}$$

$\hookrightarrow$ triangle comptant les espaliers par volume et hauteur : Sloane A227925

1							
2	1						
2	2	1					
3	4	2	1				
2	5	4	2	1			
4	8	7	4	2	1		
2	8	10	7	4	2	1	
4	13	14	12	7	4	2	1

Le nombre $n^e_{i,j,h,v}$ d'espaliers de hauteur h, volume v dont le dernier plateau a pour volume $i \times j$ est donné par la récurrence :

$$n^e_{i,j,h,v} = \sum_{0 \leq a \leq \frac{i*j*h-v}{(h-1)j}} \quad \sum_{0 \leq b \leq \frac{j(h(i+a)-a)-v}{(i+a)(k-1)}} n^e_{i+a,j+b,h-1,v-ij}$$

$\hookrightarrow$ triangle comptant les espaliers par volume et hauteur : Sloane A227925

Relation du même type pour les pyramides :

$$n^p_{i,j,h,v} = \sum_{0 \leq a \leq \frac{i*j*h-v}{(h-1)j}} \quad \sum_{0 \leq b \leq \frac{j(h(i+a)-a)-v}{(i+a)(k-1)}} (a+1)(b+1)\, n^p_{i+a,j+b,h-1,v-ij}$$

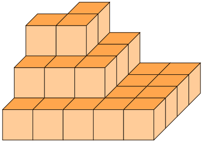
$\hookrightarrow$ triangle comptant les pyramides par volume et hauteur :

Sloane A227926

$$\lim_{h\to\infty} x^{-h}\mathscr{E}^e(x,h) = \mathscr{Q}_e(x)$$ existe.

En fait, $\mathscr{Q}_e(x) =$ série génératrice des quasi-espaliers : polycubes obtenus à partir d'un espalier en retirant la colonne $(*, 0, 0)$, comptés par volume.

$$2, 4, 7, 12, 18, 29, 42, 61, 87, 122, 167, 229$$

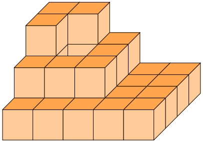


$\hookrightarrow$ Sloane A230118

De même, $\lim_{h\to\infty} x^{-h}\mathscr{E}^p(x,h) = \frac{x}{1-x} + \mathscr{Q}_p(x)$ existe.

En fait, $\mathscr{Q}_p(x)$ série génératrice des quasi-pyramides : polycubes obtenus à partir d'une pyramide en retirant une colonne de hauteur maximale, comptés par volume.

$$3, 9, 23, 47, 91, 169, 291, 494, 815, 1295, 2043, 3155, 4775$$

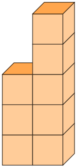


$\hookrightarrow$ Sloane A230119

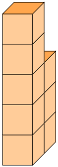
De même, $\lim_{h\to\infty} x^{-h}\mathscr{E}^p(x,h) = \frac{x}{1-x} + \mathscr{Q}_p(x)$ existe.

En fait, $\mathscr{Q}_p(x)$ série génératrice des quasi-pyramides : polycubes obtenus à partir d'une pyramide en retirant une colonne de hauteur maximale, comptés par volume.

Pourquoi $\frac{x}{1-x}$? Ne pas compter deux fois la quasi-pyramide obtenue à partir de



et



Plan

Généralisation à la dimension d+1 : empilements connexes et finis de d-cubes unité, définis à translation près et caractérisés par :

- volume v : nombre de cubes
- hauteur h : plus grande valeur de la première coordonnée

Généralisation à la dimension d+1 : empilements connexes et finis de d-cubes unité, définis à translation près et caractérisés par :

- volume v : nombre de cubes
- hauteur h : plus grande valeur de la première coordonnée

- d-polycube dirigé : toute case peut être atteinte à partir de la racine par une suite de mouvements *positifs*
- d-parallélépipède : d-polycube P tel que, pour un certain $(n_1, \cdots, n_d) \in \mathbb{N}^d$,

$$\text{si } 0 \leq \alpha_k \leq n_k,\ 1 \leq k \leq d,\ \text{alors } (\alpha_1, \cdots, \alpha_d) \in P$$

- d-plateau : d-polycube de hauteur 1 tel que sa base est un $(d-1)$-parallélépipède

Intérêt de la convolution :
Puissance de convolution $\to$ Changement de dimension

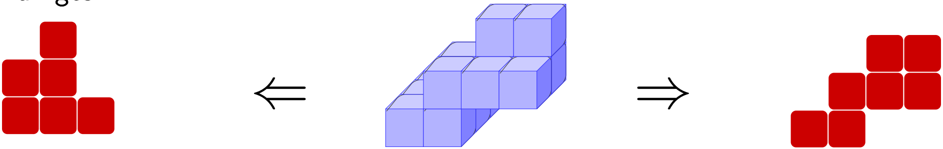
$\hookrightarrow$ série génératrice du nombre d'espaliers de hauteur h et volumes $v_1, \ldots, v_h$ en dimension $d+1$ est donnée par

$$\mathscr{E}_d^e(h, v_1, \ldots, v_h; \mathbf{x}) = \triangle^{\star d}(\mathbf{x})$$

$\hookrightarrow$ série génératrice du nombre de pyramides :

$$\mathscr{E}_d^p(h, v_1, \ldots, v_h; \mathbf{x}) = \square^{\star d}(\mathbf{x}).$$

Polycubes plateau dirigés : empilement de plateaux dont chaque cellule peut être atteinte par une suite de pas positifs N, E et en avant.
En bijection avec les paires de polyominos horizontalement connexes dirigés.



Fonction nombre de diviseurs $\tau(n)$, $\tau(x)$ la série génératrice correspondante.

$$\tau(x) = \sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{1 - x^k}.$$

Si $P_{v,h}$ = nombre de polycubes plateaux de hauteur h et volume v, alors (Dubernard *et al.*)

$$\sum_{v,h} P_{v,h} p^v t^h = \frac{t \sum_{k \geq 1} \frac{p^k}{1 - p^k}}{1 - \sum_{k \geq 1} \frac{ktp^k}{(1 - p^k)^2}}$$

soit $\displaystyle\sum_{v,h} P_{v,h} p^v t^h = \frac{t\tau(p)}{1 - tp\,\tau'(p)}$.

Nombre de polycubes plateaux dirigés de hauteur 3 en dimension 1+1 avec volumes n_1, n_2 et n_3 : a_{n_1,n_2,n_3}
Série génératrice correspondante : $T(x, y, z)$
En fait, $a_{n_1,n_2,n_3} = n_1 n_2$, donc

$$T(x, y, z) = \sum_{n_1,n_2,n_3 \geq 1} n_1 n_2 x^{n_1} y^{n_2} z^{n_3} = \frac{xyz}{(1-x)^2(1-y)^2(1-z)}.$$

Nombre de polycubes plateaux dirigés de hauteur 3 en dimension 1+1 avec volumes n_1, n_2 et n_3 : a_{n_1,n_2,n_3}
Série génératrice correspondante : $T(x,y,z)$
En fait, $a_{n_1,n_2,n_3} = n_1 n_2$, donc

$$T(x,y,z) = \sum_{n_1,n_2,n_3 \geq 1} n_1 n_2 x^{n_1} y^{n_2} z^{n_3} = \frac{xyz}{(1-x)^2(1-y)^2(1-z)}.$$

Par convolution, on obtient la série génératrice en dimension 2+1 :

$$\sum_{m_1,m_2,m_3 \geq 1} m_1 m_2 \, T(x^{m_1}, y^{m_2}, z^{m_3}) =$$

$$\sum_{m_1,m_2,m_3 \geq 1} m_1 m_2 \frac{x^{m_1} y^{m_2} z^{m_2}}{(1-x^{m_1})^2(1-y^{m_2})^2(1-z^{m_3})}.$$

Si $x = y = z = p$ (pas de détail des volumes),

$$\sum_{m_1,m_2,m_3 \geq 1} m_1 m_2 \frac{p^{m_1+m_2+m_2}}{(1-p^{m_1})^2(1-p^{m_2})^2(1-p^{m_3})} =$$

$$\left(\sum_{n\geq 1} n \frac{p^n}{(1-p^n)^2}\right)^2 \left(\sum_{n\geq 1} \frac{p^n}{1-p^n}\right).$$

En itérant

$$\sum_{m_1,\dots,m_{k+1}\geq 1} m_1\dots m_{k+1}\frac{p^{m_1+\dots+m_{k+1}}}{(1-p^{m_1})^2\dots(1-p^{m_k})^2(1-p^{m_{k+1}})}$$

$$\left(\sum_{n\geq 1} n\frac{p^n}{(1-p^n)^2}\right)^k\left(\sum_{n\geq 1}\frac{p^n}{1-p^n}\right).$$

Pour une hauteur quelconque, on obtient donc

$$\sum_{k\geq 0}\left(\sum_{n\geq 1} n\frac{p^n}{(1-p^n)^2}\right)^k\left(\sum_{n\geq 1}\frac{p^n}{1-p^n}\right)t^k$$

En itérant

$$\sum_{m_1,\dots,m_{k+1}\geq 1} m_1\dots m_{k+1}\frac{p^{m_1+\dots+m_{k+1}}}{(1-p^{m_1})^2\dots(1-p^{m_k})^2(1-p^{m_{k+1}})}$$

$$\left(\sum_{n\geq 1} n\frac{p^n}{(1-p^n)^2}\right)^k\left(\sum_{n\geq 1}\frac{p^n}{1-p^n}\right).$$

Pour une hauteur quelconque, on obtient donc

$$\sum_{k\geq 0}\left(\sum_{n\geq 1} n\frac{p^n}{(1-p^n)^2}\right)^k\left(\sum_{n\geq 1}\frac{p^n}{1-p^n}\right)t^k=\frac{t\sum_{k\geq 1}\frac{p^k}{1-p^k}}{1-\sum_{k\geq 1}\frac{ktp^k}{(1-p^k)^2}}.\checkmark$$

Objet à 2 dimensions : ensemble fini de paires $(x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{Z})$
Soient $\mathscr{O}$, $\mathscr{O}'$ deux objets à deux dimensions. On construit un objet à trois dimensions :

$$\mathscr{G}(\mathscr{O}, \mathscr{O}') = \left\{(x, y, z),\ (x, y) \in \mathscr{O},\ (x, z) \in \mathscr{O}'\right\}$$

- niveau $(L_i(\mathscr{O}) = \{(i, y, z) \in \mathscr{O}\})$,
- hauteur $(\max\{i,\ L_i(\mathscr{O}) \neq \emptyset\})$,
- multivolume (suite des cardinaux des niveaux) :

$$\mathrm{mv}(\mathscr{G}(\mathscr{O}, \mathscr{O}')) = \left[v_1 v_1^{'}, \ldots, v_{\min(h,h')} v_{\min(h,h')}^{'}\right]$$

Objets simples : $\forall\ 1 \leq i \leq h,\ L_i(\mathscr{O}) \neq \emptyset$

Soient deux familles $A = \bigcup_u A_u$ et $B = \bigcup_u B_u$ d'objets simples

- à deux dimensions
- graduées par le multivolume
- telles que tous les A_u, B_u sont finis.

On pose $a_{v_1,\ldots,v_h} = \#A_{[v_1,\ldots,v_h]}$.

Alors

$$\mathscr{G}(A, B) = \left\{\mathscr{G}(\mathscr{O}, \mathscr{O}'), \mathscr{O} \in A_u, \mathscr{O}' \in B_u\right\}$$

- ne contient que des objets simples de taille h
- est gradué par le multivolume
- vérifie

$$G = \left(\#G_{[v_1,\ldots,v_h]}\right)_{v_1,\ldots,v_h \geq 1} = A \star B$$

Série génératrice de Dirichlet des $n^e_{[v_1,\dots,v_h]}(d)$: $\mathscr{Z}_e(s_1,\dots,s_h)^d$ avec

$$\mathscr{Z}_e(s_1,\dots,s_h) = \sum_{v_1\geq\cdots\geq v_h\geq 1} \frac{1}{v_1^{s_1}\cdots v_h^{s_h}}$$

(*polyzêtas larges*).

Série génératrice de Dirichlet des $n^p_{[v_1,\dots,v_h]}(d)$: $\mathscr{Z}_p(s_1,\dots,s_h)^d$ avec

$$\mathscr{Z}_p(s_1,\dots,s_h) = \sum_{v_1\geq\cdots\geq v_h\geq 1} \frac{(v_1-v_2+1)\dots(v_{h-1}-v_h+1)}{v_1^{s_1}\dots v_h^{s_h}}$$

On a, pour $t = e, p$,

$$\frac{\partial^k}{\partial d^k}\left(\mathscr{Z}_t(s_1,\ldots,s_h)^d\right) = \mathscr{Z}_t(s_1,\ldots,s_h)^d \log\left(\mathscr{Z}(s_1,\ldots,s_h)^d\right)^k.$$

$$\mathscr{Z}_t(s_1,\ldots,s_h) = 1 + \widetilde{\mathscr{Z}_t}(s_1,\ldots,s_h)$$

avec

$$\widetilde{\mathscr{Z}_t}(s_1,\ldots,s_h) = \sum_{\substack{v_1 \geq 2 \\ v_1 \geq \cdots \geq v_h \geq 1}} \frac{(*)}{v_1^{s_1}\ldots v_h^{s_h}}$$

Par conséquent

$$\frac{\partial^k}{\partial d^k}\left(\mathscr{Z}_t(s_1,\ldots,s_h)^d\right) = \sum_{\substack{v_1\geq 2^k \\ v_1\geq\cdots\geq v_h\geq 1}} \frac{(c_*)}{v_1^{s_1}\ldots v_h^{s_h}}$$

donc $n^t_{[v_1,\ldots,v_h]}(d)$ est un polynôme en d de degré au plus $\log_2(v_1)$.

De plus,

$$\deg(n^t_{[2^k,1,\ldots,1]}(d)) = k$$

donc

Les nombres

- $n_v^e(d)$ de $(d+1)$-espaliers de volume v et
- $n_v^p(d)$ de $(d+1)$-pyramides de volume v

sont des polynômes en d de degré $\lfloor\log_2(v)\rfloor$.

Plan

$$(m_1, \dots, m_h) \preceq (n_1, \dots, n_h) \Leftrightarrow \text{ il existe un espalier}$$

- de hauteur h,
- de volume $n_1 + \cdots + n_h$
- dont une projection est donnée par $(m_1, \dots, m_h)$.

Généralise l'ordre de division sur les entiers :

$$(d, \dots, d) \preceq (n, \dots, n) \text{ si et seulement si } d|n.$$

Propriétés remarquables de la fonction de Möbius associée.

- $\mu^2((1,1),(n,n)) = \mu^2((1,1),(n,1)) = \mu(n)$;
- $\mu^2((1,1),(p,m)) = -1$ pour p premier et $p > m$;
- $\mu^2((1,1),(pq,n)) = 2^{k+1} - 1$

$$\text{si } \begin{cases} p, q \text{ sont premiers,} \\ n \text{ est le produit de } k \text{ entiers premiers distincts,} \\ p, q > n \ ; \end{cases}$$

- Si n, m sont premiers, $\mu^2((1,1),(n^2,m^2)) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \geq m^2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Lien avec les séries de Dirichlet :

$$\sum_{n\geq k_1\geq k_2\geq\cdots\geq k_\ell} \frac{\mu^{\ell+1}((1,\ldots,1),(n,k_1,\ldots,k_\ell))}{k_1\cdots k_{\ell-1}} = n\mu(n) \;;$$

Suppression de parts :

- $\mu^k((1,\ldots,1),(m_1,\ldots,m_1,\ldots,m_t,\ldots,m_t)) = \mu^t((1,\ldots,1),(m_1,\ldots,m_t))$;
- Si p est premier, $\mu^{k+1}((1,\ldots,1),(n_1,\ldots,n_i,p,n_{i+1},\ldots,n_k)) = \mu^{i+1}((1,\ldots,1),(n_1,\ldots,n_i,p))$;

Lien avec les séries de Dirichlet :

$$\sum_{n \geq k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_\ell} \frac{\mu^{\ell+1}((1,\ldots,1),(n,k_1,\ldots,k_\ell))}{k_1 \cdots k_{\ell-1}} = n\mu(n) \ ;$$

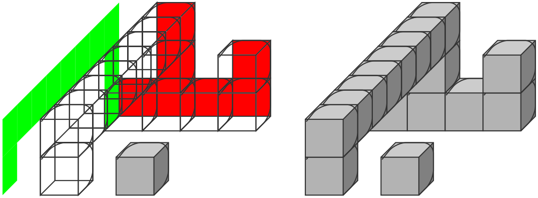
Suppression de parts :

- $\mu^k((1,\ldots,1),(m_1,\ldots,m_1,\ldots,m_t,\ldots,m_t)) = \mu^t((1,\ldots,1),(m_1,\ldots,m_t))$;
- Si p est premier, $\mu^{k+1}((1,\ldots,1),(n_1,\ldots,n_i,p,n_{i+1},\ldots,n_k)) = \mu^{i+1}((1,\ldots,1),(n_1,\ldots,n_i,p))$;
- Si p est premier et m un entier dont le plus grand facteur propre est $< p$,
$$\mu^k((1,\ldots,1),(m,\ldots,p)) = -1.$$
- De plus, $\mu^{k'}((1,\ldots,1),(n_1,\ldots,n_\ell,m,\ldots,p,n_{\ell+1},\ldots,n_k)) = -\mu^{\ell+1}((1,\ldots,1),(n_1,\ldots,n_\ell,mp))$.

Plan

Perspectives 1/2

- Fabriquer des familles de polycubes à partir d'objets à deux dimensions.
- Attention : $\mathscr{G}(P_1, P_2)$ n'est pas nécessairement un polycube si P_1 et P_2 sont des polyominos !

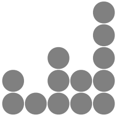
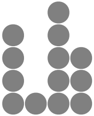
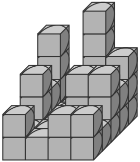


Perspectives 1/2

- Fabriquer des familles de polycubes à partir d'objets à deux dimensions.
- Attention : $\mathscr{G}(P_1, P_2)$ n'est pas nécessairement un polycube si P_1 et P_2 sont des polyominos !

- Formules obtenues avec notre méthode : énumération mais la combinatoire n'est pas exposée et semble intéressante (lien avec d'autres objets / nombres)
- Utilisation de la statistique du volume du dernier plateau $\rightarrow$ équations fonctionnelles ?
- « Canyons » et nombre d'or…

Perspectives 2/2

Caracterisation :

- si (a, b, c) appartient à P, alors $(a-1, b, c) \in P$ (for $a > 1$) ;
- pour tout b, c tel que $(a, b, c) \in P$, $a = \max\limits_{b'} \{(a, b', c)\}$ ou $a = \max\limits_{c'} \{(a, b, c')\}$.

Si $n_v^c = \sum_{i,j,h} n_{i,j,h,v}^c$ représente le nombre de canyons de volume v,

Conjecture

$$n_v^c \underset{+\infty}{\sim} 2^v + \frac{10 - 2 * \sqrt{5}}{5} \phi^v.$$