Graphes et codes complètement réguliers

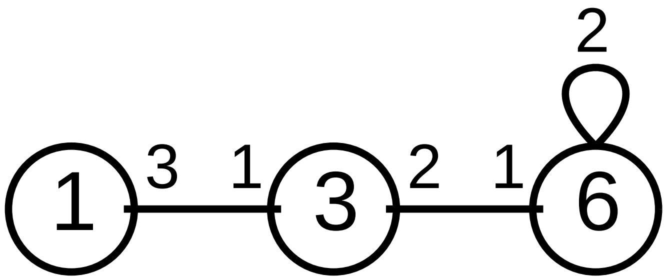
C. Delorme

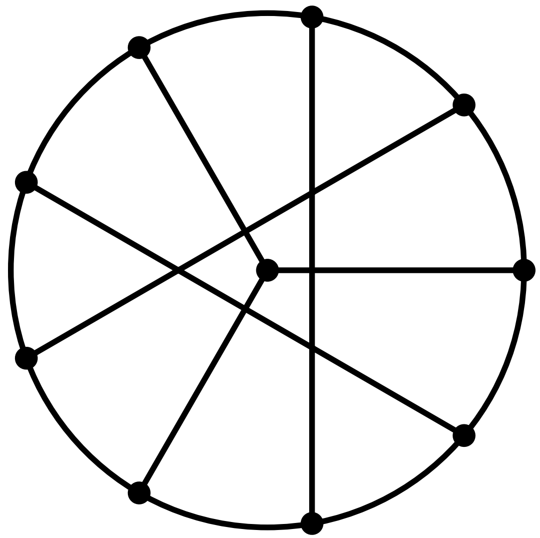
Paris 11

On rappelle ce qu'est un graphe distance-régulier

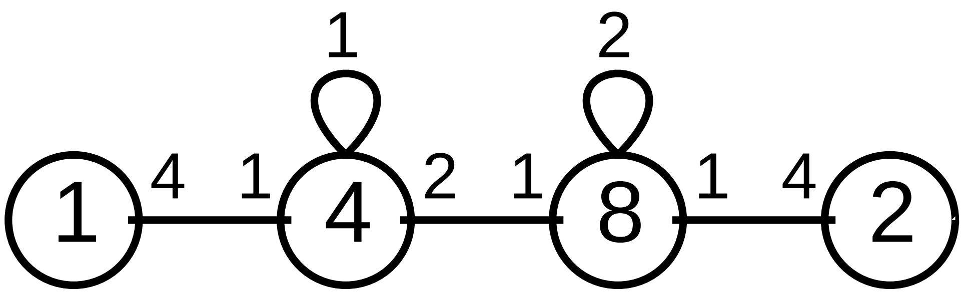
Pour chaque sommet x du graphe, chaque sommet y du graphe à distance d de x, le nombre des voisins de y à distance $d-1$ de x est c_d, à distance d de x est a_d à distance $d+1$ de x est b_d. Il s'ensuit que le nombre des sommets à distance d de x est $(b_0 b_1 b_2 .., b_{d-1})/(c_1 c_2 ... c_d)$. Ces informations se représentent avec un diagramme

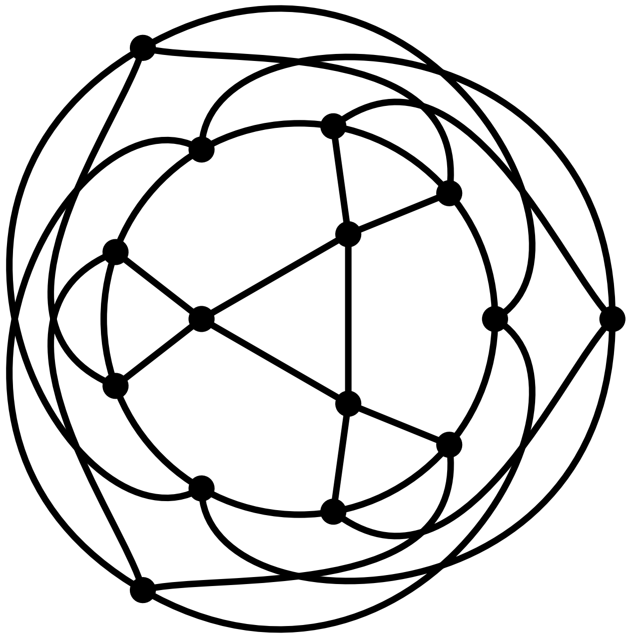
Exemple: le graphe de Petersen





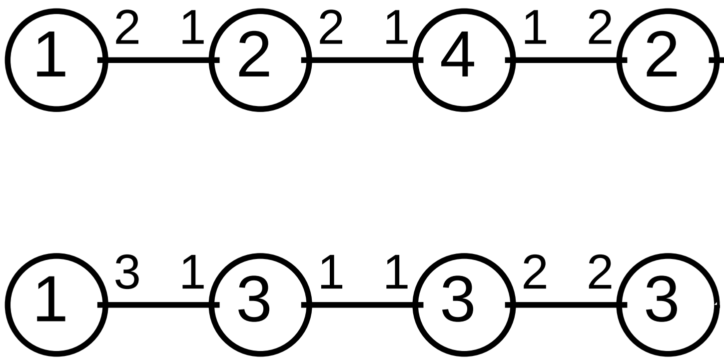
Autre exemple le line-graphe du graphe de Petersen

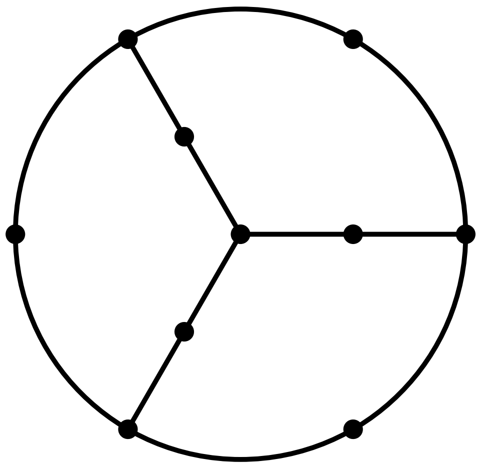




Autre point de vue, on partitionne selon la distance à un sommet et on est content si la partition est équitable pour chaque sommet.

Cela autorise aussi des graphes bipartis avec deux diagrammes Exemple la subdivision de K_4

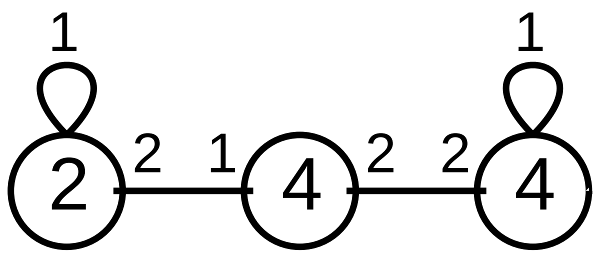




Les diagrammes des graphes distance-réguliers ou distance-biréguliers donnent les valeurs propres et les multiplicités. Dans le cas présent, $\sqrt{6}, -\sqrt{6}, \sqrt{2}^{[3]}, -\sqrt{2}^{[3]}, 0^{[2]}$

Au lieu de prendre les distances à un sommet, on peut prendre les distances à une partie, par exemple les distances à une arête. Cela peut donner une partition équitable:

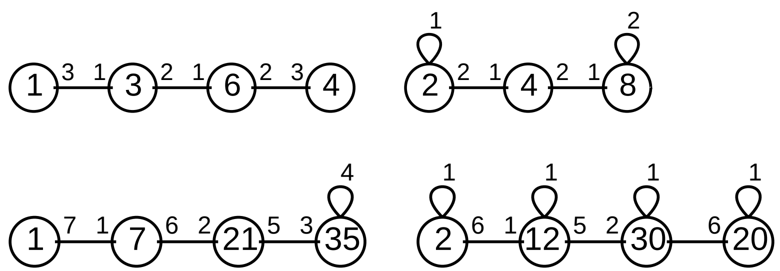
Exemple le graphe de Petersen dont ce diagramme redonne les valeurs propres



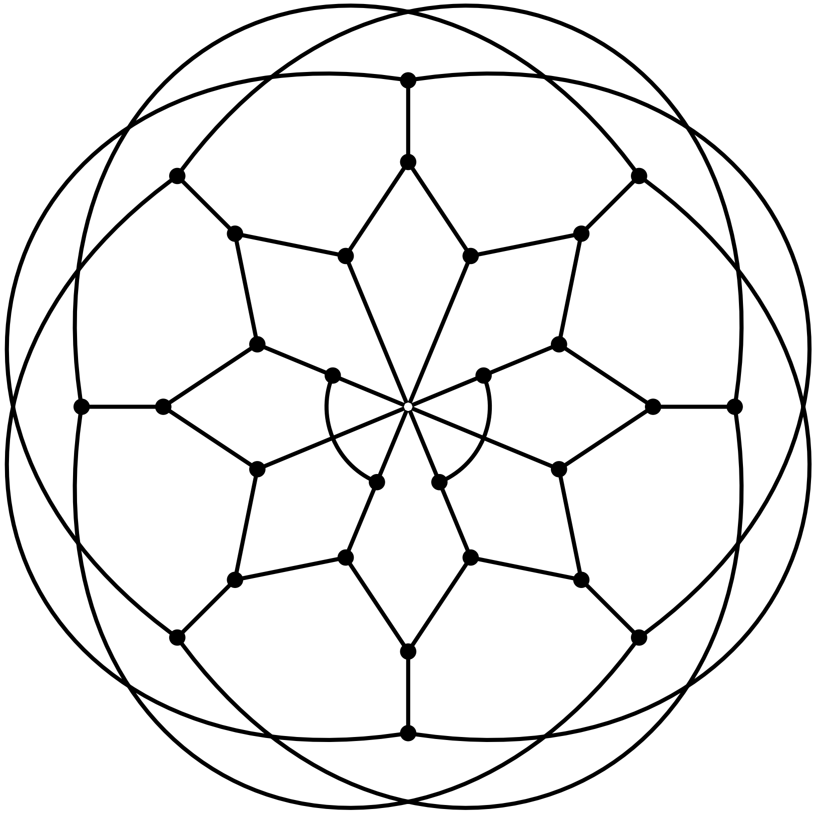
mais pas toujours, même dans un graphe distance régulier: exemple le line graphe du graphe de Petersen.

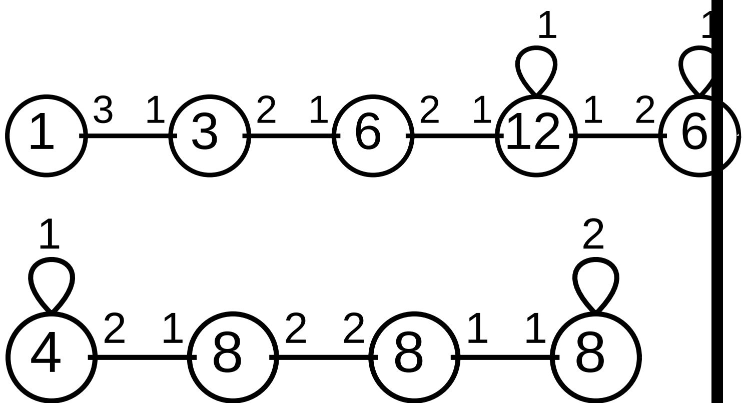
En fait M. Cámara, de Barcelone caractérise les graphes distances-réguliers dont les arêtes donnent des codes complètement réguliers (c'est-à-dire les distances aux arêtes produisent des partitions équitables).

Ce sont les bipartis et les presque-bipartis, pour lesquels les plus courts cycles impairs ont pour longueur deux fois le diamètre du graphe plus 1. C'est le cas pour le graphe de Petersen, pour les "odd graphs" (prendre les $\binom{2m+1}{m}$ parties à m éléments d'un ensemble à $2m+1$ éléments, avec adjacence pour les parties disjointes), et quelques autres, par exemple les cubes impairs repliés.



Il y a parfois des départs curieux: par exemple deux arêtes opposées dans le graphe de Coxeter



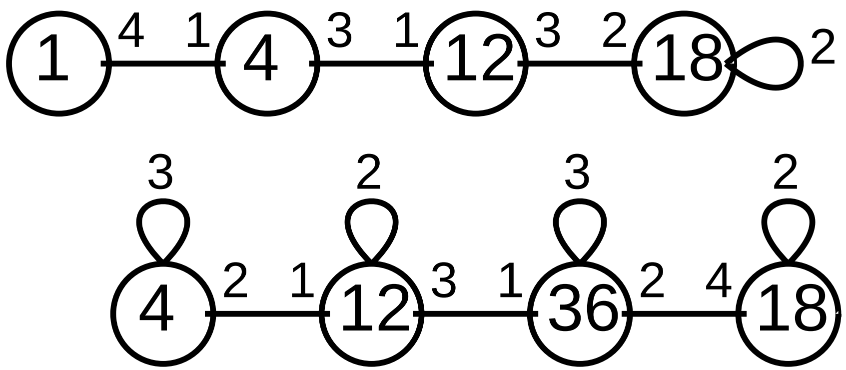


Ce diagramme redonne 4 des 5 valeurs propres, $3, 2, -1, -1 \pm 2$ (il manque -1)

Voici des constructions qui se fondent sur des graphes distance-réguliers ou distance-biréguliers.

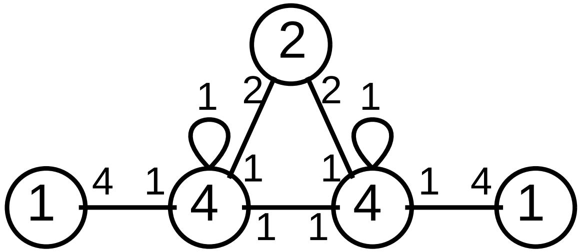
Si G est distance-régulier de diamètre $D \geq 2$ et girth $2D$ ou $2D+1$, les arêtes du line-graphe donnent un code complètement régulier dont les paramètres se calculent facilement.

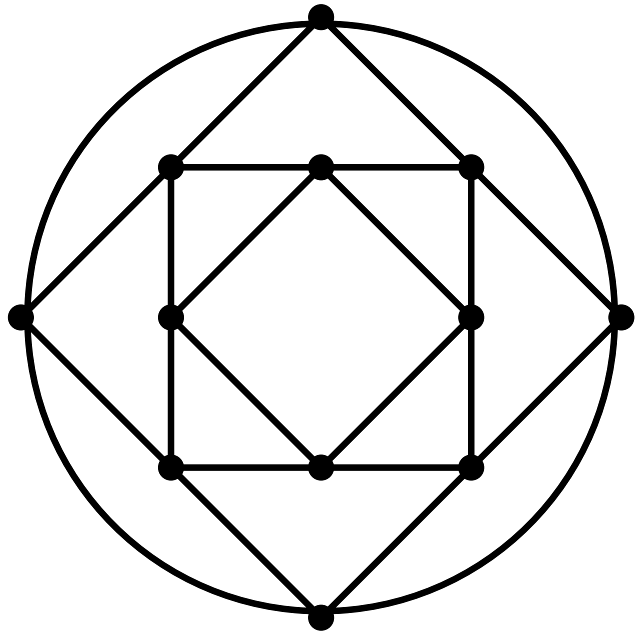
Exemple: O_4 a diamètre 3 et girth 6, valeurs propres $4, 2, -1, -3$ et son line-graphe diamètre 3 et valeurs propres $6, 4, 1, -1, -2$ n'est pas distance-régulier.



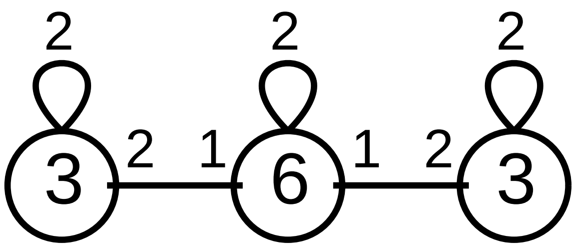
De même pour un graphe biparti distance-régulier ou distance-birégulier.

Example: le cube ordinaire, son line-graph n'est pas distance régulier, comme le montre la partition équitable la moins fine avec une partie réduite à un sommet.



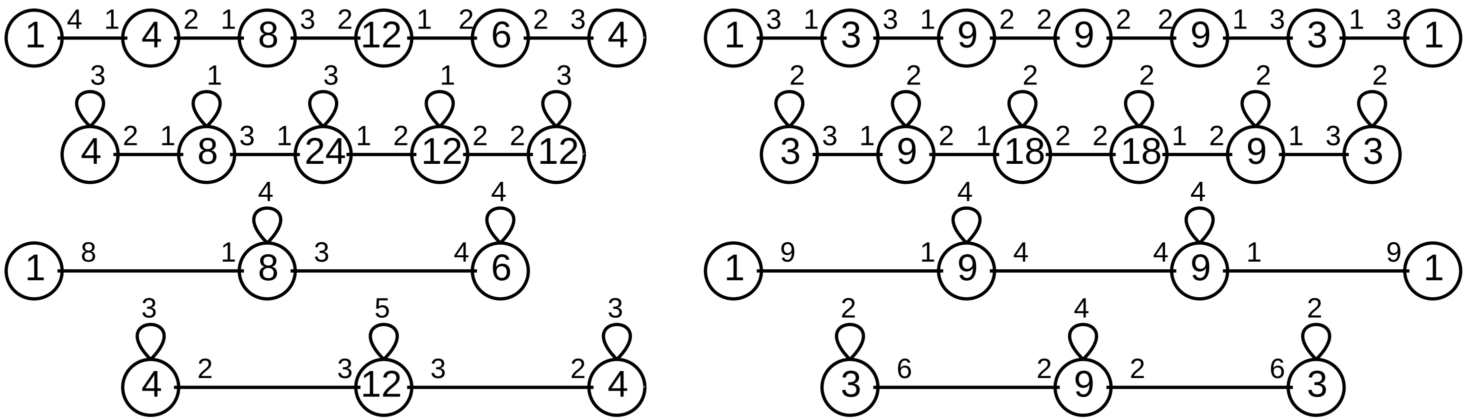


Partant d'une clique on a bien

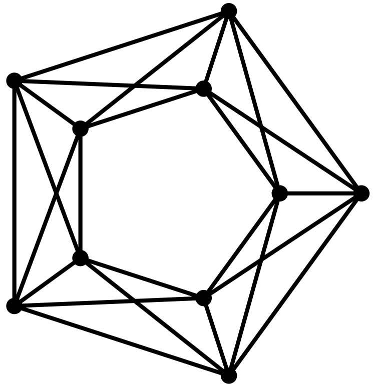


Pour un graphe biparti distance-régulier ou distance-birégulier, les deux traces de son carré dans les deux parties stables donnent des graphes distance-reguliers avec des codes complètement réguliers sur leurs cliques

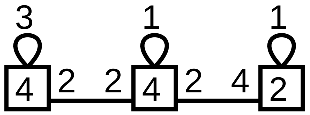
Exemple dans un ensemble les 15 parties à deux et 20 parties à trois éléments, avec l'inclusion



Le produit fort d'un graphe dont les cliques donnent des codes complètement réguliers par un graphe complet a la même propriété

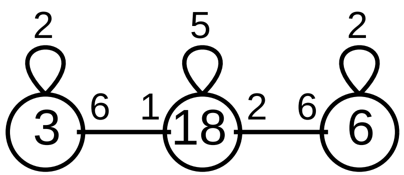


Exemple $C_5 \boxtimes K_2$



Et il y a encore d'autres constructions...

Quand on prend le produit catégorique $K_3 \times K_2 \times K_3$ on a un graphe qui n'est pas distance régulier, qui est de diamètre 2 et a pour spectre $8, 2^{[12]}, -2^{[8]}, -4^{[6]}$ (donc trop de valeurs propres pour le diamètre) mais en partant d'une clique on a le diagramme



qui donne une partie du spectre (il manque la valeur propre -4)

Le graphe qu'on vient de voir est cospectral à un graphe distance-régulier. Celui-ci est obtenu avec les 45 points et 27 droites de la quadrique hermitienne sur $\mathbb{F}_4$, en ôtant les 9 points où elle rencontre un plan ne contenant aucune des 27 droites. On prend alors les 27 droites pour sommets et l'adjacence correspond à la présence d'un point commun. On a de la sorte un graphe distance-régulier de diagramme