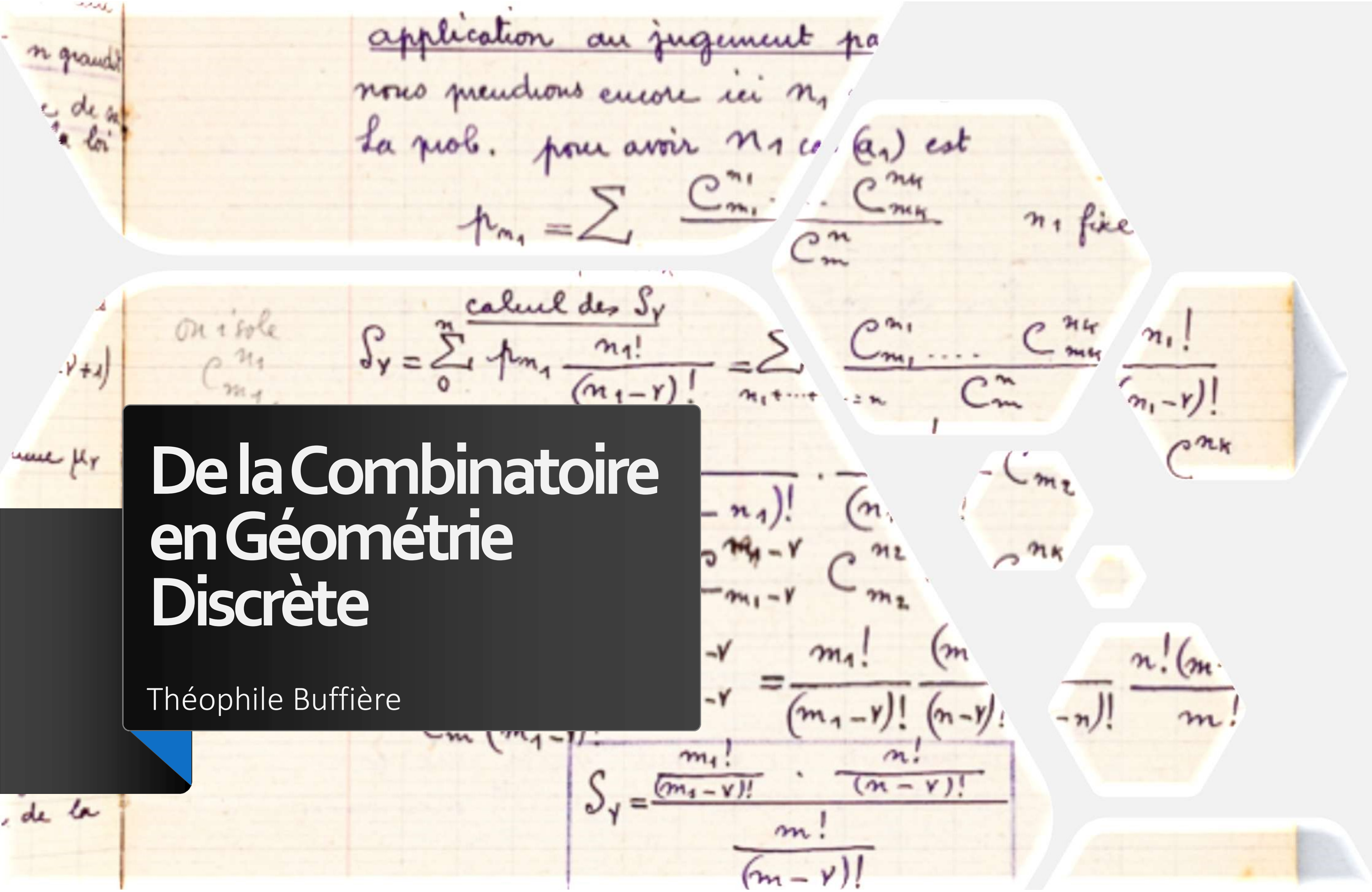


# De la Combinatoire en Géométrie Discrète

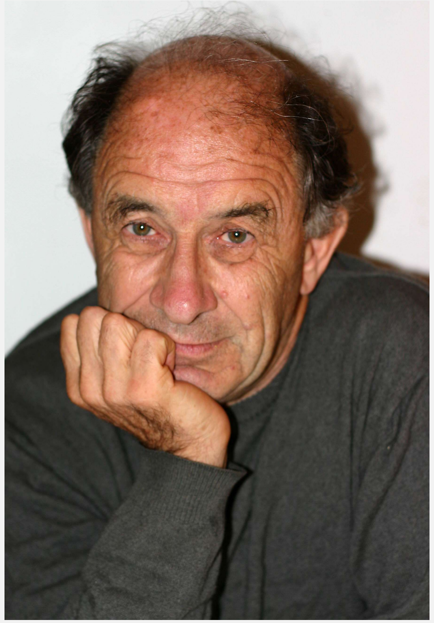
Théophile Buffière

# Quelques têtes connues

Avril 2020 -  Aujourd'hui

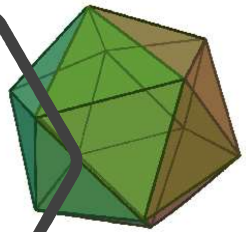
Entourage : Olivier Bodini, maître de stage

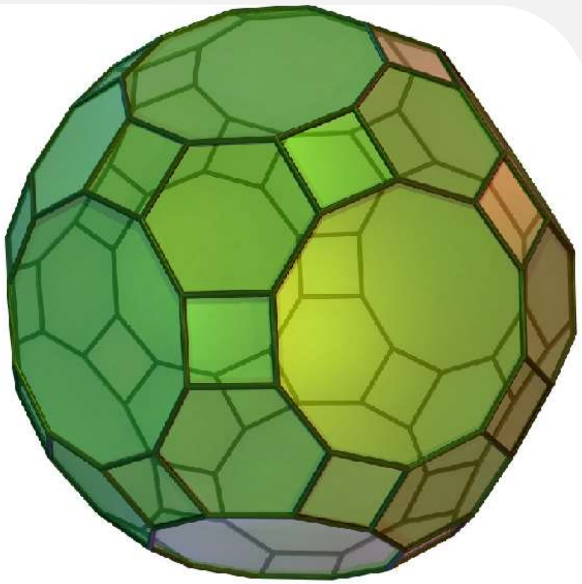
L. Pournin, P. Marchal (LAGA)



Vladimir Arnold : quel est le nombre de polytopes en nombre entier, quelle forme ont les grand ?

Imre Bàràny : l'équivalent logarithmique des polytopes





# Généralités et dimension 2

Combinatoire, Analyse complexe, Géométrie…

# Enoncé du problème

Enumérer puis chercher des propriétés asymptotiques des zonotopes en nombre entier.

## Combinatoire analytique

Associer une fonction génératrice à une classe combinatoire (méthode symbolique)

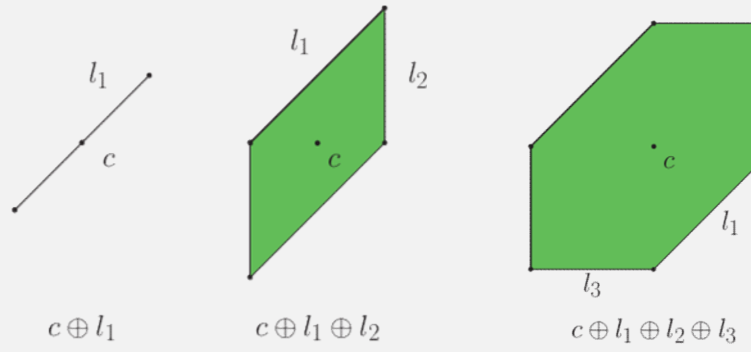
- $\boldsymbol{F}(z) = \sum_{0 \leq k} a_k \, z^k$
- Injection dans la Fonction dans l'équation de construction algébrique

Transfert les propriétés combinatoires en calcul analytique

## Les Zonotopes

*Somme de Minkowski d'un ensemble de segment (les générateurs).*

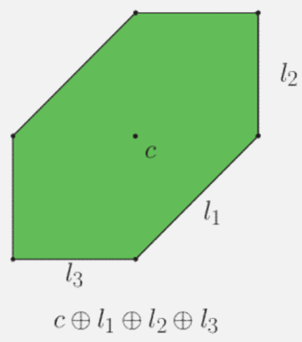
Simplification naturelle des polytopes en algorithmie



# Construction des zonogones

On veut compter les zonotopes de largeur p et hauteur q

1. Un zonotope est équivalent à la liste de ses générateurs
2. Les générateurs sont des vecteurs sans direction.
   - On prend les segments [0,(x,y)] avec x≥0
3. Leur ordre n'est pas important
   - Multiset
4. Unicité de la construction
   - [0,(4,4)] ou 4 fois [0,(1,1)]
   - On prend les segments [0,(p,q)] avec p≥0 et p ∧ q =1




$$Z(x,y) = \frac{1}{(1-x)(1-y)} \prod_{p \wedge q = 1} \frac{1}{(1-x^p y^q)^2}$$

# La Transformée de Mellin, pour simplifier les sommes et produits

Sous les hypothèses de régularité,

$$f^*(s) = \int_0^\infty f(t) t^{s-1} dt$$

## Propriété harmonique

- $g(t) = \sum_k^\infty \lambda_k\, f(\mu_k t) \rightarrow g^*(s) = \left(\sum_k^\infty \lambda_k\, \mu_k^{-s}\right) f^*(s)$

## Pôle de la transformée

Si $\alpha$ est un pôle de $f^*$ de partie réelle positive :

$$f^*(s) = \frac{a}{(s-\alpha)^k}$$

$$\Longleftrightarrow$$

## Comportement asymptotique

Alors au voisinage de 0,

$$f(t) \sim \frac{(-1)^{k-1}\, a}{(k-1)!} t^{-\alpha} \ln^{k-1}(t)$$

# La Méthode du point col pour calculer les intégrales

But : estimer $\int_C e^{f(z)}dz$ avec $f$ qui dépend d'un paramètre n.

$C$ est un chemin qui passe par $\zeta$ point col, $C'$ est un bout du chemin qui comprend $\zeta$

1. Négliger les queues

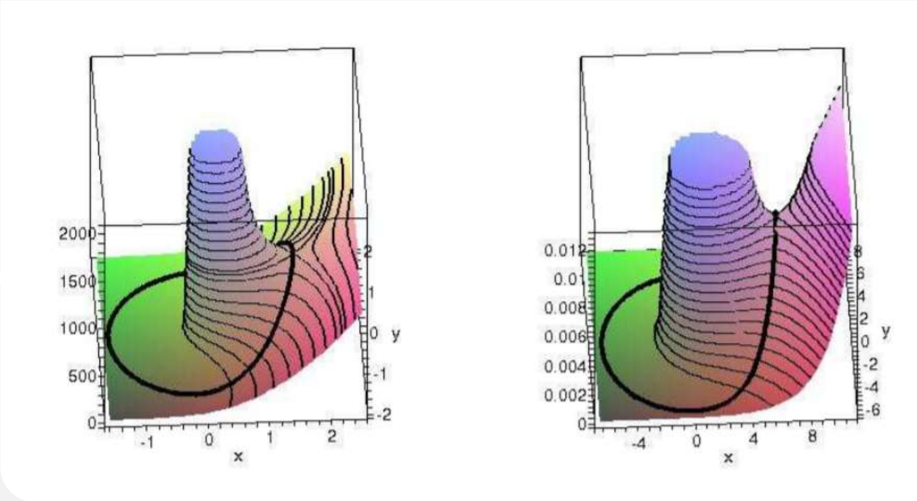
$$\int_{C\setminus C'} e^{f(z)}dz = o\left(\int_C e^{f(z)}dz\right)$$

2. Approximer le centre

sur $C'$ on a $f(z) = f(\zeta) + \frac{f''(z)}{2}(z-\zeta)^2 + o(1)$

3. Rajouter les queues

$$\int_{C'} e^{\frac{f''(z)}{2}(z-\zeta)^2} dz \sim \int_0^{\infty} e^{\frac{f''(z)}{2}(z-\zeta)^2} dz$$




Alors on a : $\frac{1}{2i\pi}\int_C e^{f(z)}dz \sim \frac{e^{f(\zeta)}}{\sqrt{2\pi f''(\zeta)}}$

## Utilisation principale :

Formule de Cauchy pour avoir l'équivalent des coefficients d'une série

# Nombre asymptotique dans un carré de côté $\frac{n}{2}$

Fonction génératrice : $Z(x,y)$

- Combinatoire analytique

Méthode du col pour avoir $\left[x^{\frac{n}{2}}, y^{\frac{n}{2}}\right] Z(x,y)$

- Nécessite H-admissibilité

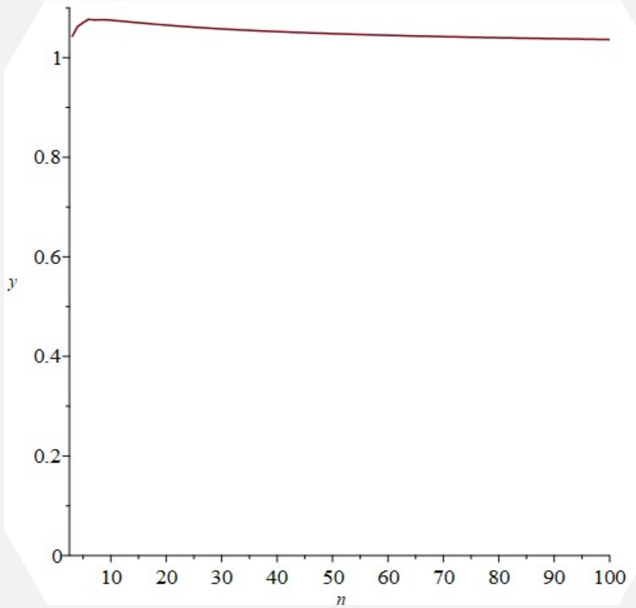
Transformée de Mellin pour les calculs

$$\boxed{Z(n) \sim \alpha n^{-\frac{11}{9}} e^{\beta n^{\frac{2}{3}}}}$$

avec $\alpha = \frac{2^{1/3}\zeta(3)^{2/9} e^{-4\zeta'(-1)}}{3^{5/18}\pi^{16/9}}$

et $\beta = \frac{3^{4/3}\zeta(3)^{1/3}}{\pi^{2/3}}$

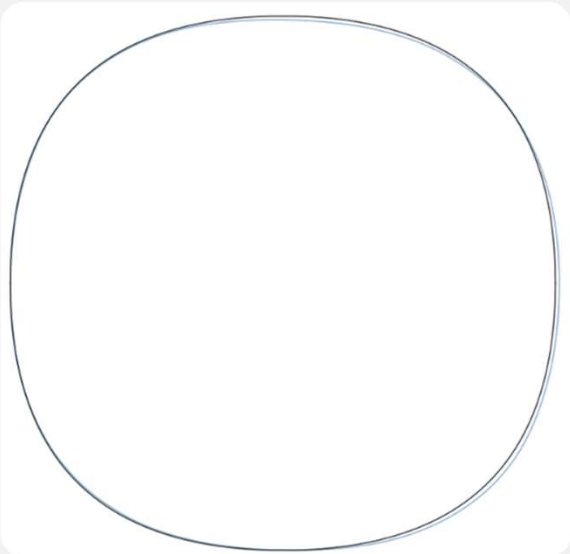
Convergence par rapport aux simulations



# Beaucoup de propriétés asymptotiques découlent de cette méthode

Une propriété paramétrique sur les zonotopes = ajout de variables de comptage sur la fonction génératrice

Forme limite des zonotopes : $f(x) = \sqrt{2x} - x$



Nombre moyen de côté :

$$S(z) = (1-z)^{-2} \prod_{n>1} (1-z^n)^{-2\phi(n)}$$

$$F(u,z) = \prod_{n\geq 1} \left(1 + \sum_{k\geq 1} u z^{nk}\right)^{2\phi(n)}$$

$$\frac{[z^n]\ \frac{\partial}{\partial u} F(u,z)\big|_{u=1}}{[z^n] F(1,z)} = \left(\frac{\sqrt{3}n}{\zeta(3)\pi}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Plus généralement, tout paramètre algébriquement constructible (diamètre, longueur du plus grand côté, nombre de zonotopes avec un nombre de côté paire…)

# Dimensions supérieures

Résultat, Généralisation, Difficultés

# Une nouvelle correspondance pour nous aider

Pour calculer $Z(x,y)$ et ses dérivées, il y a des sommes telles $\sum_{p\wedge q=n} p^i q^j$

- $\sum_{p\wedge q=n} p = \frac{\phi(n)n}{2}$ pour $i = 1$ et $j = 0$
- Dès $\sum_{p\wedge q=n} pq$, il n'y a plus de calcul exact

$$s_N = \sum_{\substack{p_1\wedge p_2\wedge\ldots\wedge p_n=1 \\ p_1+\cdots+p_n=N}} p_1^{i_1} p_2^{i_2} \ldots p_n^{i_n}$$

$$G(z) = \sum_n s_N z^N$$

$$\sum_n k^{i_1+\cdots+i_n} G(z^k) = \frac{\prod_{k=1}^n A_{i_k}}{(1-z)^{j+n}}$$

*Transformation compatible avec la transformée de Mellin :* $\boldsymbol{G^*(s)} = \frac{\mathbf{1}}{\zeta(s-i_1-\cdots-i_n)}\left(\frac{\prod_{k=1}^n A_{i_k}}{(1-z)^{j+n}}\right)^*$

# Dimensions supérieures

- Dimension 3

$$Z(x,y,z) = (1-x)^{-1}(1-y)^{-1}(1-z)^{-1}\prod_{p\wedge q=1}(1-x^py^q)^{-2}(1-x^pz^q)^{-2}(1-z^py^q)^{-2}\prod_{p\wedge q\wedge r=1}(1-x^py^qz^r)^{-4}$$

Nombre de zonotopes dans un cube de côté $\frac{n}{3}$ :

$$Z\left(\frac{n}{3}\right) = \alpha\, n^{13/8} e^{\beta\, n^{3/4}}$$

- Cas général

La formule explicite et les calculs sont très lourds

Stratégie actuelle :

Démontrer l'existence de l'asymptotique, ainsi que de la forme limite

# Merci de votre attention