La théorie de Ramsey et la dynamique topologique

Manuel Bodirsky

CNRS / LIX, École Polytechnique

Avril 2012

Sommaire

- Classes de Ramsey
- Le théorème de Kechris, Pestov, et Todorcevic
- Des conséquences combinatoires
- Des applications dans l'analyse de la complexité des CSPs (problèmes de satisfaction de contraintes)

Le théorème de Ramsey

Nous écrivons $[l]$ pour $\{1, \ldots, l\}$.

Théorème (Ramsey's theorem).

Pour tous entiers naturels r, m, k il existe un entier naturel $l = \mathbf{R}(r, m, k)$ tel que pour chaque $\chi : \binom{[l]}{m} \to [r]$ il existe un ensemble $S \in \binom{[l]}{k}$ tel que χ est constant sur $\binom{S}{m}$.

Le théorème de Ramsey

Nous écrivons $[l]$ pour $\{1, \ldots, l\}$.

Théorème (Ramsey's theorem).

Pour tous entiers naturels r, m, k il existe un entier naturel $l = \mathbf{R}(r, m, k)$ tel que pour chaque $\chi : \binom{[l]}{m} \to [r]$ il existe un ensemble $S \in \binom{[l]}{k}$ tel que χ est constant sur $\binom{S}{m}$.

Un cas particulier: pour $r = k = 2$, on obtient:
pour tout m, il existe l tel que chaque graphe avec l sommets contient soit une clique soit un stable de taille m.

Le théorème de Ramsey

Nous écrivons $[l]$ pour $\{1, \ldots, l\}$.

Théorème (Ramsey's theorem).

Pour tous entiers naturels r, m, k il existe un entier naturel $l = \mathbf{R}(r, m, k)$ tel que pour chaque $\chi : \binom{[l]}{m} \to [r]$ il existe un ensemble $S \in \binom{[l]}{k}$ tel que χ est constant sur $\binom{S}{m}$.

Un cas particulier: pour $r = k = 2$, on obtient:
pour tout m, il existe l tel que chaque graphe avec l sommets contient soit une clique soit un stable de taille m.
$\mathbf{R}(2, 3, 2) > 5$:

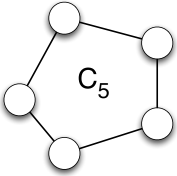
Le théorème de Ramsey

Nous écrivons $[l]$ pour $\{1, \ldots, l\}$.

Théorème (Ramsey's theorem).

Pour tous entiers naturels r, m, k il existe un entier naturel $l = \mathbf{R}(r, m, k)$ tel que pour chaque $\chi : \binom{[l]}{m} \to [r]$ il existe un ensemble $S \in \binom{[l]}{k}$ tel que χ est constant sur $\binom{S}{m}$.

Un cas particulier: pour $r = k = 2$, on obtient:
pour tout m, il existe l tel que chaque graphe avec l sommets contient soit une clique soit un stable de taille m.
$\mathbf{R}(2, 3, 2) > 5$:



Des théorèmes de type Ramsey pour les graphes

Des théorèmes de type Ramsey pour les graphes

Notons $\binom{S}{T}$ l'ensemble des sous-structures (induites) de S qui sont isomorphes à T.

Des théorèmes de type Ramsey pour les graphes

Notons $\binom{S}{T}$ l'ensemble des sous-structures (induites) de S qui sont isomorphes à T.

Définition.

Pour des graphes G, H, P, notons

$$G \to (H)^P_k$$

ssi pour tout $\chi : \binom{G}{P} \to [k]$ il existe un $H' \in \binom{G}{H}$ tel que χ est constant sur $\binom{H'}{P}$.

Des théorèmes de type Ramsey pour les graphes

Notons $\binom{S}{T}$ l'ensemble des sous-structures (induites) de S qui sont isomorphes à T.

Définition.

Pour des graphes G, H, P, notons

$$G \to (H)^P_k$$

ssi pour tout $\chi : \binom{G}{P} \to [k]$ il existe un $H' \in \binom{G}{H}$ tel que χ est constant sur $\binom{H'}{P}$.

Exemple 1. Pour tout graphe H il existe un graphe G tel que $G \to (H)^{K_2}_2$.

Des théorèmes de type Ramsey pour les graphes

Notons $\binom{S}{T}$ l'ensemble des sous-structures (induites) de S qui sont isomorphes à T.

Définition.

Pour des graphes G, H, P, notons

$$G \rightarrow (H)^P_k$$

ssi pour tout $\chi : \binom{G}{P} \rightarrow [k]$ il existe un $H' \in \binom{G}{H}$ tel que χ est constant sur $\binom{H'}{P}$.

Exemple 1. Pour tout graphe H il existe un graphe G tel que $G \rightarrow (H)^{K_2}_2$.

Exemple 2. Pour tout graphe H et tout entier naturel r il existe un graphe G tel que $G \rightarrow (H)^{K_3}_r$.

Classes de Ramsey

Définition.

Une classe de structures relationnelles $\mathcal{C}$ est nommée classe de Ramsey ssi pour tous $H, P \in \mathcal{C}$ et pour tout $r \geq 2$, il existe $G \in \mathcal{C}$ tel que $G \rightarrow (H)^P_r$.

Classes de Ramsey

Définition.

Une classe de structures relationnelles $\mathcal{C}$ est nommée classe de Ramsey ssi pour tous $H, P \in \mathcal{C}$ et pour tout $r \geq 2$, il existe $G \in \mathcal{C}$ tel que $G \rightarrow (H)^P_r$.

Exemple 1 : La classe des structures finies de signature vide.

Classes de Ramsey

Définition.

Une classe de structures relationnelles $\mathcal{C}$ est nommée classe de Ramsey ssi pour tous $H, P \in \mathcal{C}$ et pour tout $r \geq 2$, il existe $G \in \mathcal{C}$ tel que $G \to (H)^P_r$.

Exemple 1 : La classe des structures finies de signature vide.
(reformulation du théorème de Ramsey)

Classes de Ramsey

Définition.

Une classe de structures relationnelles $\mathcal{C}$ est nommée classe de Ramsey ssi pour tous $H, P \in \mathcal{C}$ et pour tout $r \geq 2$, il existe $G \in \mathcal{C}$ tel que $G \to (H)^P_r$.

Exemple 1 : La classe des structures finies de signature vide.
(reformulation du théorème de Ramsey)
Exemple 2 : La classe des ordres linéaires.

Classes de Ramsey

Définition.

Une classe de structures relationnelles $\mathcal{C}$ est nommée classe de Ramsey ssi pour tous $H, P \in \mathcal{C}$ et pour tout $r \geq 2$, il existe $G \in \mathcal{C}$ tel que $G \to (H)^P_r$.

Exemple 1 : La classe des structures finies de signature vide.
(reformulation du théorème de Ramsey)
Exemple 2 : La classe des ordres linéaires.
(reformulation du théorème de Ramsey)

Classes de Ramsey

Définition.

Une classe de structures relationnelles $\mathcal{C}$ est nommée classe de Ramsey ssi pour tous $H, P \in \mathcal{C}$ et pour tout $r \geq 2$, il existe $G \in \mathcal{C}$ tel que $G \to (H)^P_r$.

Exemple 1 : La classe des structures finies de signature vide.
(reformulation du théorème de Ramsey)
Exemple 2 : La classe des ordres linéaires.
(reformulation du théorème de Ramsey)
Non-exemple : La classe des graphes finis.

Classes de Ramsey

Définition.

Une classe de structures relationnelles $\mathcal{C}$ est nommée classe de Ramsey ssi pour tous $H, P \in \mathcal{C}$ et pour tout $r \geq 2$, il existe $G \in \mathcal{C}$ tel que $G \to (H)^P_r$.

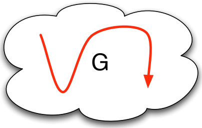
Exemple 1 : La classe des structures finies de signature vide.
(reformulation du théorème de Ramsey)
Exemple 2 : La classe des ordres linéaires.
(reformulation du théorème de Ramsey)
Non-exemple : La classe des graphes finis.
Il n'existe aucun G tel que $G \to (C_4)^{P_3}_2$:

Classes de Ramsey

Définition.

Une classe de structures relationnelles $\mathcal{C}$ est nommée classe de Ramsey ssi pour tous $H, P \in \mathcal{C}$ et pour tout $r \geq 2$, il existe $G \in \mathcal{C}$ tel que $G \rightarrow (H)^P_r$.

Exemple 1 : La classe des structures finies de signature vide.
(reformulation du théorème de Ramsey)
Exemple 2 : La classe des ordres linéaires.
(reformulation du théorème de Ramsey)
Non-exemple : La classe des graphes finis.
Il n'existe aucun G tel que $G \rightarrow (C_4)^{P_3}_2$:

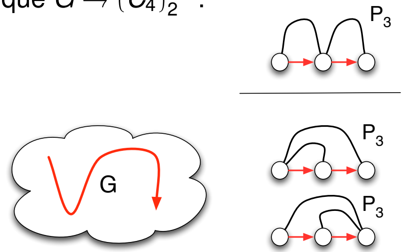


Classes de Ramsey

Définition.

Une classe de structures relationnelles $\mathcal{C}$ est nommée classe de Ramsey ssi pour tous $H, P \in \mathcal{C}$ et pour tout $r \geq 2$, il existe $G \in \mathcal{C}$ tel que $G \to (H)^P_r$.

Exemple 1 : La classe des structures finies de signature vide.
(reformulation du théorème de Ramsey)
Exemple 2 : La classe des ordres linéaires.
(reformulation du théorème de Ramsey)
Non-exemple : La classe des graphes finis.
Il n'existe aucun G tel que $G \to (C_4)^{P_3}_2$:



Nešetřil-Rödl

Les graphes finis ne sont pas une classe de Ramsey, mais . . .

Nešetřil-Rödl

Les graphes finis ne sont pas une classe de Ramsey, mais . . .
les graphes finis ordonnés le sont.

Nešetřil-Rödl

Les graphes finis ne sont pas une classe de Ramsey, mais ...
les graphes finis ordonnés le sont.
Plus généralement, nous avons :

Théorème (Nešetřil-Rödl'84).
Soit τ une signature relationnelle. Alors la classe des τ-structures ordonnées est une classe de Ramsey.

Nešetřil-Rödl

Les graphes finis ne sont pas une classe de Ramsey, mais . . .
les graphes finis ordonnés le sont.
Plus généralement, nous avons :

Théorème (Nešetřil-Rödl'84).

Soit τ une signature relationnelle. Alors la classe des τ-structures ordonnées est une classe de Ramsey.

Une preuve élégante de ce théorème est basée sur la méthode partite.

Nešetřil-Rödl

Les graphes finis ne sont pas une classe de Ramsey, mais ...
les graphes finis ordonnés le sont.
Plus généralement, nous avons :

Théorème (Nešetřil-Rödl'84).

Soit τ une signature relationnelle. Alors la classe des τ-structures ordonnées est une classe de Ramsey.

Une preuve élégante de ce théorème est basée sur la méthode partite. Cette méthode est composée d'un lemme partite et d'une construction d'amalgamation.

Nešetřil-Rödl

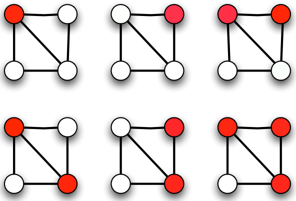
Les graphes finis ne sont pas une classe de Ramsey, mais ...
les graphes finis ordonnés le sont.
Plus généralement, nous avons :

Théorème (Nešetřil-Rödl'84).

Soit τ une signature relationnelle. Alors la classe des τ-structures ordonnées est une classe de Ramsey.

Une preuve élégante de ce théorème est basée sur la méthode partite. Cette méthode est composée d'un lemme partite et d'une construction d'amalgamation.

Le lemme partite utilise le théorème de Hales–Jewett : pour chaque R, t il existe un $N = HJ(R, t)$ tel que chaque $\xi \colon R^N \to [t]$ contient une ligne monochromatique.
Exemple : $HJ(2, 2) = 2$



Résultats connus

Toutes les structures mentionées sur cette page sont finies.

Pas de classe de Ramsey	Classe de Ramsey
	$\mathcal{LO}$: tous les ordres linéaires
Graphes	Graphes ordonnés
Posets Posets ordonnés	Posets avec une extension linéaire (Nešetřil-Rödl,Trotter-Felsner-Fishburn)
Relations d'équivalence ordonnées	Relations d'équivalence avec un ordre convexe
Tournois	Tournois ordonnés
	Algèbres de Boole (Graham-Leeb-Rothschild)
	Algèbres de Boole avec un ordre 'canonique'
	Espaces vectoriels (Graham-Leeb-Rothschild)
	Espaces vectoriels avec un ordre 'canonique'
C-relations	*C*-relations avec un ordre convexe (Leeb, Miliken)

Amalgamation

Proposition (Nešetřil).

Soit $\mathcal{C}$ une classe de Ramsey avec la propriété du plongement commun, alors $\mathcal{C}$ a la propriété d'amalgamation.

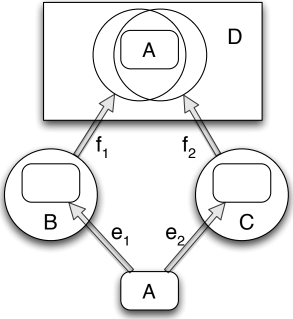
Amalgamation

Proposition (Nešetřil).

Soit $\mathcal{C}$ une classe de Ramsey avec la propriété du plongement commun, alors $\mathcal{C}$ a la propriété d'amalgamation.

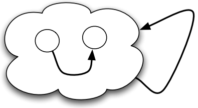
$\mathcal{C}$ possède la propriété d'amalgamation ssi pour tous $A, B, C \in \mathcal{C}$ et plongements $e_1 \colon A \to B$ et $e_2 \colon A \to C$ il existe $D \in \mathcal{C}$ et les plongements $f_1 \colon B \to D$ et $f_2 \colon C \to D$ tels que $f_1(e_1(a)) = f_2(e_2(a))$ pour tout $a \in A$.

$\mathcal{C}$ a l'amalgamation forte ssi, en outre, $f_1(B) \cap f_2(C) = f_1(e_1(A)) = f_2(e_2(A))$.



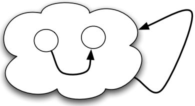
Limites de Fraïssé et homogénéité

Une structure Γ est homogène ssi tout isomorphisme entre deux sous-structures de Γ se prolonge en un automorphisme de Γ.



Limites de Fraïssé et homogénéité

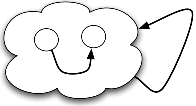
Une structure Γ est homogène ssi tout isomorphisme entre deux sous-structures de Γ se prolonge en un automorphisme de Γ.



Exemple : $(\mathbb{Q}; <)$

Limites de Fraïssé et homogénéité

Une structure Γ est homogène ssi tout isomorphisme entre deux sous-structures de Γ se prolonge en un automorphisme de Γ.

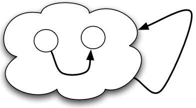


Exemple : $(\mathbb{Q}; <)$

L'âge d'une structure relationnelle Γ : la classe de toutes les structures finies qui se plonge dans Γ.

Limites de Fraïssé et homogénéité

Une structure Γ est homogène ssi tout isomorphisme entre deux sous-structures de Γ se prolonge en un automorphisme de Γ.



Exemple : $(\mathbb{Q}; <)$

L'âge d'une structure relationnelle Γ : la classe de toutes les structures finies qui se plonge dans Γ.

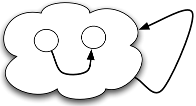
Théorème (Fraïssé).

Soit $\mathcal{C}$ une classe des structures finies qui

- est close par isomorphismes et sous-structures,
- possède la propriété d'amalgamation, et
- contient un nombre fini de types d'isomorphisme.

Limites de Fraïssé et homogénéité

Une structure Γ est homogène ssi tout isomorphisme entre deux sous-structures de Γ se prolonge en un automorphisme de Γ.



Exemple : $(\mathbb{Q}; <)$

L'âge d'une structure relationnelle Γ : la classe de toutes les structures finies qui se plonge dans Γ.

Théorème (Fraïssé).

Soit $\mathcal{C}$ une classe des structures finies qui

- est close par isomorphismes et sous-structures,
- possède la propriété d'amalgamation, et
- contient un nombre fini de types d'isomorphisme.

Alors il existe une structure homogène dénombrable Γ dont l'âge est $\mathcal{C}$; la structure Γ est unique à isomorphie près.

Une classification des classes Ramsey des graphes

Une classification des classes Ramsey des graphes

Théorème (Lachlan-Woodrow'80).

À isomorphie près, voici sont tous les graphes dénombrables et homogènes :

1. Le Graphe aléatoire, c'est-à-dire, la limite de Fraïssé des graphes finis;
2. K_ω;
3. $\omega \cdot K_\omega$, la limite de Fraïssé des graphes transitifs;
4. Pour chaque n, la limite des graphes qui ne contiennent pas K_n;
5. Les compléments des graphes précédents.

Une classification des classes Ramsey des graphes

Théorème (Lachlan-Woodrow'80).

À isomorphie près, voici sont tous les graphes dénombrables et homogènes :

1. Le Graphe aléatoire, c'est-à-dire, la limite de Fraïssé des graphes finis;
2. K_ω;
3. $\omega \cdot K_\omega$, la limite de Fraïssé des graphes transitifs;
4. Pour chaque n, la limite des graphes qui ne contiennent pas K_n;
5. Les compléments des graphes précédents.

En vérifiant tous les cas, on peut observer qu'il n'y a que deux classes de Ramsey qui ont la propriété du plongement commun et qui sont closes par sous-structures (Nešetřil) :

Une classification des classes Ramsey des graphes

Théorème (Lachlan-Woodrow'80).

À isomorphie près, voici sont tous les graphes dénombrables et homogènes :

1. Le Graphe aléatoire, c'est-à-dire, la limite de Fraïssé des graphes finis;
2. K_ω;
3. $\omega \cdot K_\omega$, la limite de Fraïssé des graphes transitifs;
4. Pour chaque n, la limite des graphes qui ne contiennent pas K_n;
5. Les compléments des graphes précédents.

En vérifiant tous les cas, on peut observer qu'il n'y a que deux classes de Ramsey qui ont la propriété du plongement commun et qui sont closes par sous-structures (Nešetřil) :

- la classe des cliques finies, et
- la classe des stables finis.

Le programme de Nešetřil

Le programme de Nešetřil

Nešetřil'03 : Est-ce qu'on peut classifier toutes les classes de Ramsey qui ont la propriété du plongement commun et qui sont closes par sous-structures ?

Le programme de Nešetřil

Nešetřil'03 : Est-ce qu'on peut classifier toutes les classes de Ramsey qui ont la propriété du plongement commun et qui sont closes par sous-structures ?

Fait : Une classe des structures finies est close par sous-structures et possède la propriété du plongement commun
si et seulement si
elle est l'âge d'une structure dénombrable.

Le programme de Nešetřil

Nešetřil'03 : Est-ce qu'on peut classifier toutes les classes de Ramsey qui ont la propriété du plongement commun et qui sont closes par sous-structures ?

Fait : Une classe des structures finies est close par sous-structures et possède la propriété du plongement commun
si et seulement si
elle est l'âge d'une structure dénombrable.

Dans ce contexte, il est raisonnable de dire qu'une structure homogène est Ramsey ssi son âge est Ramsey.

Topological Dynamics

Soit Γ une structure sur un domaine X infini dénombrable.

Topological Dynamics

Soit Γ une structure sur un domaine X infini dénombrable.
Le groupe d'automorphisms $\text{Aut}(\Gamma)$ a une topologie naturelle, la topologie de convergence simple (induite par X^X) :

Topological Dynamics

Soit Γ une structure sur un domaine X infini dénombrable.
Le groupe d'automorphisms $\text{Aut}(\Gamma)$ a une topologie naturelle, la topologie de convergence simple (induite par X^X) : une base d'ouverts est donnée par $\{\alpha \in G \mid \alpha(\bar{a}) = \bar{b}\}$ pour deux n-uplets finis $\bar{a}, \bar{b}$ dans X.

Topological Dynamics

Soit Γ une structure sur un domaine X infini dénombrable.
Le groupe d'automorphisms $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ a une topologie naturelle, la topologie de convergence simple (induite par X^X) : une base d'ouverts est donnée par $\{\alpha \in G \mid \alpha(\bar{a}) = \bar{b}\}$ pour deux n-uplets finis $\bar{a}, \bar{b}$ dans X.

$\mathrm{Aut}(\Gamma)$ est un groupe topologique (un groupe abstrait avec une topologie où la composition et l'inverse sont continus),
et il et polonais, c'est-à-dire que sa topologie est séparable et complètement métrisable.

Topological Dynamics

Soit Γ une structure sur un domaine X infini dénombrable.
Le groupe d'automorphisms $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ a une topologie naturelle, la topologie de convergence simple (induite par X^X) : une base d'ouverts est donnée par $\{\alpha \in G \mid \alpha(\bar{a}) = \bar{b}\}$ pour deux n-uplets finis $\bar{a}, \bar{b}$ dans X.

$\mathrm{Aut}(\Gamma)$ est un groupe topologique (un groupe abstrait avec une topologie où la composition et l'inverse sont continus),
et il et polonais, c'est-à-dire que sa topologie est séparable et complètement métrisable.

Théorème (Kechris, Pestov, Todorcevic'03).

Une structure ordonnée et homogène Γ est Ramsey si et seulement si $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ est extrêmement moyennable, c'est-à-dire que chaque action continue de G sur un compact (sens français) a un point fixe.

KPT : plus des détails

Théorème (Kechris, Pestov, Todorcevic'03).

Soit Γ une structure homogène, et soit $\mathbf{G}$ le groupe topologique d'automorphismes de Γ. Sont équivalents :

KPT : plus des détails

Théorème (Kechris, Pestov, Todorcevic'03).

Soit Γ une structure homogène, et soit $\mathbf{G}$ le groupe topologique d'automorphismes de Γ. Sont équivalents :

1. L'âge de Γ ne contient que des structures rigides, et possède la propriété de Ramsey.

KPT : plus des détails

Théorème (Kechris, Pestov, Todorcevic'03).

Soit Γ une structure homogène, et soit $\mathbf{G}$ le groupe topologique d'automorphismes de Γ. Sont équivalents :

1. L'âge de Γ ne contient que des structures rigides, et possède la propriété de Ramsey.
2. *(a)* Toute sous-structure finie F de Γ est rigide, et
   (b) pour toutes les orbites O_1, O_2 des sous-ensembles finis de Γ, et pour chaque $\chi : O_1 \to [r]$ il existe un $i \leq r$ et un $F \in O_2$ tel que $\chi(F') = i$ pour tout $F' \subseteq F$, $F' \in O_1$.

KPT : plus des détails

Théorème (Kechris, Pestov, Todorcevic'03).

Soit Γ une structure homogène, et soit $\mathbf{G}$ le groupe topologique d'automorphismes de Γ. Sont équivalents :

1. L'âge de Γ ne contient que des structures rigides, et possède la propriété de Ramsey.
2. *(a)* Toute sous-structure finie F de Γ est rigide, et
   (b) pour toutes les orbites O_1, O_2 des sous-ensembles finis de Γ, et pour chaque $\chi : O_1 \to [r]$ il existe un $i \leq r$ et un $F \in O_2$ tel que $\chi(F') = i$ pour tout $F' \subseteq F$, $F' \in O_1$.
3. Pour tout sous-groupe $\mathbf{V}$ de $\mathbf{G}$, tout $\chi : \mathbf{G}/\mathbf{V} \to [r]$, et tout $A \subseteq \mathbf{G}/\mathbf{V}$ fini il existe $g \in G$ et $1 \leq i \leq r$ tel que $\forall x \in A. \chi(ga) = i$.

KPT : plus des détails

Théorème (Kechris, Pestov, Todorcevic'03).

Soit Γ une structure homogène, et soit $\mathbf{G}$ le groupe topologique d'automorphismes de Γ. Sont équivalents :

1. L'âge de Γ ne contient que des structures rigides, et possède la propriété de Ramsey.
2. *(a)* Toute sous-structure finie F de Γ est rigide, et
   (b) pour toutes les orbites O_1, O_2 des sous-ensembles finis de Γ, et pour chaque $\chi : O_1 \to [r]$ il existe un $i \leq r$ et un $F \in O_2$ tel que $\chi(F') = i$ pour tout $F' \subseteq F$, $F' \in O_1$.
3. Pour tout sous-groupe $\mathbf{V}$ de $\mathbf{G}$, tout $\chi : \mathbf{G}/\mathbf{V} \to [r]$, et tout $A \subseteq \mathbf{G}/\mathbf{V}$ fini il existe $g \in G$ et $1 \leq i \leq r$ tel que $\forall x \in A.\ \chi(ga) = i$.
4. $\mathbf{G}$ est extrêmement moyennable.

KPT : plus des détails

Théorème (Kechris, Pestov, Todorcevic'03).

Soit Γ une structure homogène, et soit $\mathbf{G}$ le groupe topologique d'automorphismes de Γ. Sont équivalents :

1. L'âge de Γ ne contient que des structures rigides, et possède la propriété de Ramsey.
2. *(a)* Toute sous-structure finie F de Γ est rigide, et *(b)* pour toutes les orbites O_1, O_2 des sous-ensembles finis de Γ, et pour chaque $\chi : O_1 \to [r]$ il existe un $i \leq r$ et un $F \in O_2$ tel que $\chi(F') = i$ pour tout $F' \subseteq F$, $F' \in O_1$.
3. Pour tout sous-groupe $\mathbf{V}$ de $\mathbf{G}$, tout $\chi : \mathbf{G}/\mathbf{V} \to [r]$, et tout $A \subseteq \mathbf{G}/\mathbf{V}$ fini il existe $g \in G$ et $1 \leq i \leq r$ tel que $\forall x \in A. \chi(ga) = i$.
4. $\mathbf{G}$ est extrêmement moyennable.
5. L'âge de Γ est une classe de Ramsey, et l'action de G sur Γ préserve un ordre linéaire $<$.

Contexte

Contexte

Une structure Γ dénombrable est nommée ω-catégorique ssi tous les modèles dénombrables de la théorie de Γ sont isomorphes à Γ.

Contexte

Une structure Γ dénombrable est nommée ω-catégorique ssi tous les modèles dénombrables de la théorie de Γ sont isomorphes à Γ.

Fait 1 : Toutes les structures homogènes avec une signature relationnelle finie sont ω-catégoriques.

Contexte

Une structure Γ dénombrable est nommée ω-catégorique ssi tous les modèles dénombrables de la théorie de Γ sont isomorphes à Γ.

Fait 1 : Toutes les structures homogènes avec une signature relationnelle finie sont ω-catégoriques.

Fait 2 : Une structure ω-catégorique est homogène si et seulement si elle admet l'élimination des quantificateurs.

Conséquence de KPT : bi-interprétabilité

La propriété de Ramsey d'une structure Γ ne dépends que du groupe d'automorphismes de Γ.

Conséquence de KPT : bi-interprétabilité

La propriété de Ramsey d'une structure Γ ne dépends que du groupe d'automorphismes de Γ.

Théorème (Ahlbrandt-Ziegler'86).

Soient Γ et Δ des structures ω-catégoriques. Les groupes d'automorphismes de Γ et de Δ sont isomorphes (comme groupes topologiques) si et seulement si Γ et Δ sont bi-interprétable (en logique du premier ordre).

Conséquence de KPT : bi-interprétabilité

La propriété de Ramsey d'une structure Γ ne dépends que du groupe d'automorphismes de Γ.

Théorème (Ahlbrandt-Ziegler'86).

Soient Γ et Δ des structures ω-catégoriques. Les groupes d'automorphismes de Γ et de Δ sont isomorphes (comme groupes topologiques) si et seulement si Γ et Δ sont bi-interprétable (en logique du premier ordre).

Conclusion : La propriété de Ramsey est preservée par des bi-interprétations !

Conséquence de KPT : bi-interprétabilité

La propriété de Ramsey d'une structure Γ ne dépends que du groupe d'automorphismes de Γ.

Théorème (Ahlbrandt-Ziegler'86).

Soient Γ et Δ des structures ω-catégoriques. Les groupes d'automorphismes de Γ et de Δ sont isomorphes (comme groupes topologiques) si et seulement si Γ et Δ sont bi-interprétable (en logique du premier ordre).

Conclusion : La propriété de Ramsey est preservée par des bi-interprétations !

Exemple. Soit $\mathbb{I}$ l'ensemble des intervalles $[a, b]$ sur $\mathbb{Q}$ ($a, b \in \mathbb{Q}$).
Soit $m \subset \mathbb{I}^2$ la relation binaire $\{([a, b], [c, d]) \mid b = c\}$.

Conséquence de KPT : bi-interprétabilité

La propriété de Ramsey d'une structure Γ ne dépends que du groupe d'automorphismes de Γ.

Théorème (Ahlbrandt-Ziegler'86).

Soient Γ et Δ des structures ω-catégoriques. Les groupes d'automorphismes de Γ et de Δ sont isomorphes (comme groupes topologiques) si et seulement si Γ et Δ sont bi-interprétable (en logique du premier ordre).

Conclusion : La propriété de Ramsey est preservée par des bi-interprétations !

Exemple. Soit $\mathbb{I}$ l'ensemble des intervalles $[a, b]$ sur $\mathbb{Q}$ ($a, b \in \mathbb{Q}$).
Soit $m \subset \mathbb{I}^2$ la relation binaire $\{([a, b], [c, d]) \mid b = c\}$.

On sait : $(\mathbb{Q}; <)$ est Ramsey.

Conséquence de KPT : bi-interprétabilité

La propriété de Ramsey d'une structure Γ ne dépends que du groupe d'automorphismes de Γ.

Théorème (Ahlbrandt-Ziegler'86).

Soient Γ et Δ des structures ω-catégoriques. Les groupes d'automorphismes de Γ et de Δ sont isomorphes (comme groupes topologiques) si et seulement si Γ et Δ sont bi-interprétable (en logique du premier ordre).

Conclusion : La propriété de Ramsey est preservée par des bi-interprétations !

Exemple. Soit $\mathbb{I}$ l'ensemble des intervalles $[a, b]$ sur $\mathbb{Q}$ ($a, b \in \mathbb{Q}$).
Soit $m \subset \mathbb{I}^2$ la relation binaire $\{([a, b], [c, d]) \mid b = c\}$.

On sait : $(\mathbb{Q}; <)$ est Ramsey.
Facile à voir : $(\mathbb{Q}; <)$ et $(\mathbb{I}; m)$ sont bi-interprétables.

Conséquence de KPT : bi-interprétabilité

La propriété de Ramsey d'une structure Γ ne dépends que du groupe d'automorphismes de Γ.

Théorème (Ahlbrandt-Ziegler'86).

Soient Γ et Δ des structures ω-catégoriques. Les groupes d'automorphismes de Γ et de Δ sont isomorphes (comme groupes topologiques) si et seulement si Γ et Δ sont bi-interprétable (en logique du premier ordre).

Conclusion : La propriété de Ramsey est preservée par des bi-interprétations !

Exemple. Soit $\mathbb{I}$ l'ensemble des intervalles $[a, b]$ sur $\mathbb{Q}$ ($a, b \in \mathbb{Q}$).
Soit $m \subset \mathbb{I}^2$ la relation binaire $\{([a, b], [c, d]) \mid b = c\}$.

On sait : $(\mathbb{Q}; <)$ est Ramsey.
Facile à voir : $(\mathbb{Q}; <)$ et $(\mathbb{I}; m)$ sont bi-interprétables.
Conclusion : $(\mathbb{I}; m)$ est Ramsey.

Conséquences 2 : le rôle de l'ordre

Conséquences 2 : le rôle de l'ordre

L'annonce détaillée du théorème de KPT implique :

Corollaire 1.

Soit $\mathcal{C}$ une classe de Ramsey. Alors les membres de $\mathcal{C}$ sont rigides si et seulement s'il existe une formule sans quantificateurs $\phi(x_1, x_2)$ qui définit un ordre linéaire sur chaque membre de $\mathcal{C}$.

Conséquences 2 : le rôle de l'ordre

L'annonce détaillée du théorème de KPT implique :

Corollaire 1.

Soit $\mathcal{C}$ une classe de Ramsey. Alors les membres de $\mathcal{C}$ sont rigides si et seulement s'il existe une formule sans quantificateurs $\phi(x_1, x_2)$ qui définit un ordre linéaire sur chaque membre de $\mathcal{C}$.

Avec les techniques de KPT, on peut démontrer également :

Corollaire 2.

Soit $\mathcal{C}$ une classe de Ramsey. Alors on peut enrichir les membres de $\mathcal{C}$ par un ordre linéaire tel que la classe qu'on obtient est de nouveau Ramsey.

Conséquences 3 : principes de transfert

Conséquences 3 : principes de transfert

Proposition (from KPT).

- Soit N un sous-groupe normal d'un groupe topologique G.
  Si G/N et N sont extrêmement moyennables, tel est G.
- Des produits des groupes extrêmement moyennables sont également extrêmement moyennables.

Conséquences 3 : principes de transfert

Proposition (from KPT).

- Soit N un sous-groupe normal d'un groupe topologique G.
  Si G/N et N sont extrêmement moyennables, tel est G.
- Des produits des groupes extrêmement moyennables sont également extrêmement moyennables.

Exemple. Soit V un ensemble infini dénombrable, soit $Eq \subset V^2$ une relation d'équivalence avec un nombre infini des classes d'équivalence infinies, et soit $<$ un ordre linéaire sur V qui est convexe par rapport à Eq.

Conséquences 3 : principes de transfert

Proposition (from KPT).

- Soit N un sous-groupe normal d'un groupe topologique G.
  Si G/N et N sont extrêmement moyennables, tel est G.
- Des produits des groupes extrêmement moyennables sont également extrêmement moyennables.

Exemple. Soit V un ensemble infini dénombrable, soit $Eq \subset V^2$ une relation d'équivalence avec un nombre infini des classes d'équivalence infinies, et soit $<$ un ordre linéaire sur V qui est convexe par rapport à Eq.

But : prouver que $(V; Eq, <)$ est Ramsey

Conséquences 3 : principes de transfert

Proposition (from KPT).

- Soit N un sous-groupe normal d'un groupe topologique G.
  Si G/N et N sont extrêmement moyennables, tel est G.
- Des produits des groupes extrêmement moyennables sont également extrêmement moyennables.

Exemple. Soit V un ensemble infini dénombrable, soit $Eq \subset V^2$ une relation d'équivalence avec un nombre infini des classes d'équivalence infinies, et soit $<$ un ordre linéaire sur V qui est convexe par rapport à Eq.

But : prouver que $(V; Eq, <)$ est Ramsey

Grâce à KPT, c'est équivalent à : $G := \mathrm{Aut}(V; Eq, <)$ est extrêmement moyennable.

Conséquences 3 : principes de transfert

Proposition (from KPT).

- Soit N un sous-groupe normal d'un groupe topologique G.
  Si G/N et N sont extrêmement moyennables, tel est G.
- Des produits des groupes extrêmement moyennables sont également extrêmement moyennables.

Exemple. Soit V un ensemble infini dénombrable, soit $Eq \subset V^2$ une relation d'équivalence avec un nombre infini des classes d'équivalence infinies, et soit $<$ un ordre linéaire sur V qui est convexe par rapport à Eq.

But : prouver que $(V; Eq, <)$ est Ramsey

Grâce à KPT, c'est équivalent à : $G := \text{Aut}(V; Eq, <)$ est extrêmement moyennable.

Preuve : $N := (\text{Aut}(\mathbb{Q}; <))^\omega$ est un sous-groupe normal de G, et G/N est isomorphe à $\text{Aut}(\mathbb{Q}; <)$.

Conséquences 4 : expansions par des constants

Question : Si Γ est homogène et Ramsey, est $(\Gamma, c_1, \ldots, c_n)$ Ramsey, aussi?

Conséquences 4 : expansions par des constants

Question : Si Γ est homogène et Ramsey, est $(\Gamma, c_1, \ldots, c_n)$ Ramsey, aussi?

$\mathrm{Aut}(\Gamma, c_1, \ldots, c_n)$ est un sous-groupe ouvert de $\mathrm{Aut}(\Gamma)$.

Conséquences 4 : expansions par des constants

Question : Si Γ est homogène et Ramsey, est $(\Gamma, c_1, \ldots, c_n)$ Ramsey, aussi?

$\mathrm{Aut}(\Gamma, c_1, \ldots, c_n)$ est un sous-groupe ouvert de $\mathrm{Aut}(\Gamma)$.

Si Γ est ordonné, **il suffit de prouver :** tout sous-groupe ouvert d'un groupe qui est extrêmement moyennable est extrêmement moyennable.

Conséquences 4 : expansions par des constants

Question : Si Γ est homogène et Ramsey, est $(\Gamma, c_1, \ldots, c_n)$ Ramsey, aussi?

$\mathrm{Aut}(\Gamma, c_1, \ldots, c_n)$ est un sous-groupe ouvert de $\mathrm{Aut}(\Gamma)$.

Si Γ est ordonné, **il suffit de prouver :** tout sous-groupe ouvert d'un groupe qui est extrêmement moyennable est extrêmement moyennable.

Proposition (B.,Pinsker,Tsankov'11).

Si Γ est ordonné, homogène, et Ramsey, tel est $(\Gamma, c_1, \ldots, c_n)$.

Sous-groupes ouverts

Soit G extrêmement moyennable, et soit H un sous-groupe de G avec une action continue sur un compact X.

Sous-groupes ouverts

Soit G extrêmement moyennable, et soit H un sous-groupe de G avec une action continue sur un compact X.

But : démontrer que cette action a un point fixe.

Sous-groupes ouverts

Soit G extrêmement moyennable, et soit H un sous-groupe de G avec une action continue sur un compact X.

But : démontrer que cette action a un point fixe.
Notons $\pi \colon \mathbf{G} \to \mathbf{H}\backslash\mathbf{G}$ pour la fonction de quotient et $s \colon \mathbf{H}\backslash\mathbf{G} \to \mathbf{G}$ pour une section de π (une fonction qui satisfait $\pi \circ s = \mathrm{id}$) telle que $s(H) = 1$.

Sous-groupes ouverts

Soit G extrêmement moyennable, et soit H un sous-groupe de G avec une action continue sur un compact X.

But : démontrer que cette action a un point fixe.
Notons $\pi\colon \mathbf{G} \to \mathbf{H}\backslash\mathbf{G}$ pour la fonction de quotient et $s\colon \mathbf{H}\backslash\mathbf{G} \to \mathbf{G}$ pour une section de π (une fonction qui satisfait $\pi \circ s = \mathrm{id}$) telle que $s(H) = 1$.
Soit α la fonction $\mathbf{H}\backslash\mathbf{G} \times \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ définie par

$$\alpha(w, g) = s(w)gs(wg)^{-1} \; .$$

Sous-groupes ouverts

Soit G extrêmement moyennable, et soit H un sous-groupe de G avec une action continue sur un compact X.

But : démontrer que cette action a un point fixe.
Notons $\pi\colon \mathbf{G} \to \mathbf{H}\backslash\mathbf{G}$ pour la fonction de quotient et $s\colon \mathbf{H}\backslash\mathbf{G} \to \mathbf{G}$ pour une section de π (une fonction qui satisfait $\pi \circ s = \mathrm{id}$) telle que $s(H) = 1$.
Soit α la fonction $\mathbf{H}\backslash\mathbf{G} \times \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ définie par

$$\alpha(w, g) = s(w)gs(wg)^{-1} \; .$$

L'action co-induite de $\mathbf{G}$ sur $X^{\mathbf{H}\backslash\mathbf{G}}$ est définie par

$$(g \cdot \xi)(w) = \alpha(w, g) \cdot \xi(wg).$$

Sous-groupes ouverts

Soit G extrêmement moyennable, et soit H un sous-groupe de G avec une action continue sur un compact X.

But : démontrer que cette action a un point fixe.
Notons $\pi\colon \mathbf{G} \to \mathbf{H}\backslash\mathbf{G}$ pour la fonction de quotient et $s\colon \mathbf{H}\backslash\mathbf{G} \to \mathbf{G}$ pour une section de π (une fonction qui satisfait $\pi \circ s = \mathrm{id}$) telle que $s(H) = 1$.
Soit α la fonction $\mathbf{H}\backslash\mathbf{G} \times \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ définie par

$$\alpha(w, g) = s(w)gs(wg)^{-1} .$$

L'action co-induite de $\mathbf{G}$ sur $X^{\mathbf{H}\backslash\mathbf{G}}$ est définie par

$$(g \cdot \xi)(w) = \alpha(w, g) \cdot \xi(wg).$$

Vérifie : cette action est continue.

Sous-groupes ouverts

Soit G extrêmement moyennable, et soit H un sous-groupe de G avec une action continue sur un compact X.

But : démontrer que cette action a un point fixe.
Notons $\pi\colon \mathbf{G} \to \mathbf{H}\backslash\mathbf{G}$ pour la fonction de quotient et $s\colon \mathbf{H}\backslash\mathbf{G} \to \mathbf{G}$ pour une section de π (une fonction qui satisfait $\pi \circ s = \mathrm{id}$) telle que $s(H) = 1$.
Soit α la fonction $\mathbf{H}\backslash\mathbf{G} \times \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ définie par

$$\alpha(w, g) = s(w)gs(wg)^{-1} .$$

L'action co-induite de $\mathbf{G}$ sur $X^{\mathbf{H}\backslash\mathbf{G}}$ est définie par

$$(g \cdot \xi)(w) = \alpha(w, g) \cdot \xi(wg).$$

Vérifie : cette action est continue.
Par la moyennabilité extrême de $\mathbf{G}$: elle a un point fixe ξ_0.

Sous-groupes ouverts

Soit G extrêmement moyennable, et soit H un sous-groupe de G avec une action continue sur un compact X.

But : démontrer que cette action a un point fixe.
Notons $\pi\colon \mathbf{G} \to \mathbf{H}\backslash\mathbf{G}$ pour la fonction de quotient et $s\colon \mathbf{H}\backslash\mathbf{G} \to \mathbf{G}$ pour une section de π (une fonction qui satisfait $\pi \circ s = \mathrm{id}$) telle que $s(H) = 1$.
Soit α la fonction $\mathbf{H}\backslash\mathbf{G} \times \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ définie par

$$\alpha(w, g) = s(w)gs(wg)^{-1} \; .$$

L'action co-induite de $\mathbf{G}$ sur $X^{\mathbf{H}\backslash\mathbf{G}}$ est définie par

$$(g \cdot \xi)(w) = \alpha(w, g) \cdot \xi(wg).$$

Vérifie : cette action est continue.
Par la moyennabilité extrême de $\mathbf{G}$: elle a un point fixe ξ_0.
Finale : $\xi_0(H) \in X$ est un point fixe de l'action $H \curvearrowright X$.

Conséquences 5 : l'amalgamation des signatures

Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux classes à signatures disjointes σ et τ, et avec l'amalgamation forte.

Conséquences 5 : l'amalgamation des signatures

Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux classes à signatures disjointes σ et τ, et avec l'amalgamation forte.

Définition.

La classe $\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2$ consiste de toutes les $(\sigma \cup \tau)$-structures dont le σ-réduit vient de $\mathcal{C}_1$ et le τ-réduit vient de $\mathcal{C}_2$.

Conséquences 5 : l'amalgamation des signatures

Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux classes à signatures disjointes σ et τ, et avec l'amalgamation forte.

Définition.

La classe $\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2$ consiste de toutes les $(\sigma \cup \tau)$-structures dont le σ-réduit vient de $\mathcal{C}_1$ et le τ-réduit vient de $\mathcal{C}_2$.

Observation. $\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2$ a l'amalgamation forte.

Conséquences 5 : l'amalgamation des signatures

Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux classes à signatures disjointes σ et τ, et avec l'amalgamation forte.

Définition.

La classe $\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2$ consiste de toutes les $(\sigma \cup \tau)$-structures dont le σ-réduit vient de $\mathcal{C}_1$ et le τ-réduit vient de $\mathcal{C}_2$.

Observation. $\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2$ a l'amalgamation forte.

Exemple.

$\mathcal{C}_1$: la classe des graphes. $\mathcal{C}_2$: la class des ordres linéaires.

Conséquences 5 : l'amalgamation des signatures

Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux classes à signatures disjointes σ et τ, et avec l'amalgamation forte.

Définition.

La classe $\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2$ consiste de toutes les $(\sigma \cup \tau)$-structures dont le σ-réduit vient de $\mathcal{C}_1$ et le τ-réduit vient de $\mathcal{C}_2$.

Observation. $\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2$ a l'amalgamation forte.

Exemple.
$\mathcal{C}_1$: la classe des graphes. $\mathcal{C}_2$: la class des ordres linéaires.
Alors $\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2$ est la classe des graphes ordonnés.

Conséquences 5 : l'amalgamation des signatures

Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux classes à signatures disjointes σ et τ, et avec l'amalgamation forte.

Définition.

La classe $\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2$ consiste de toutes les $(\sigma \cup \tau)$-structures dont le σ-réduit vient de $\mathcal{C}_1$ et le τ-réduit vient de $\mathcal{C}_2$.

Observation. $\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2$ a l'amalgamation forte.

Exemple.

$\mathcal{C}_1$: la classe des graphes. $\mathcal{C}_2$: la class des ordres linéaires.
Alors $\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2$ est la classe des graphes ordonnés.

Théorème (B.'11).

Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ des classes avec l'amalgamation forte.

- Si $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont ordonnés et Ramsey, alors $\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2$ est aussi Ramsey.

Conséquences 5 : l'amalgamation des signatures

Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux classes à signatures disjointes σ et τ, et avec l'amalgamation forte.

Définition.

La classe $\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2$ consiste de toutes les $(\sigma \cup \tau)$-structures dont le σ-réduit vient de $\mathcal{C}_1$ et le τ-réduit vient de $\mathcal{C}_2$.

Observation. $\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2$ a l'amalgamation forte.

Exemple.
$\mathcal{C}_1$: la classe des graphes. $\mathcal{C}_2$: la class des ordres linéaires.
Alors $\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2$ est la classe des graphes ordonnés.

Théorème (B.'11).

Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ des classes avec l'amalgamation forte.

- Si $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont ordonnés et Ramsey, alors $\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2$ est aussi Ramsey.
- Si $\mathcal{C}_1$ est ordonné et Ramsey, et $\mathcal{C}_2 \wedge \mathcal{LO}$ est Ramsey, alors $\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2$ est aussi Ramsey.

Conséquences 5, continuées

Corollaire.

Les classes suivantes sont Ramsey (et leurs limites de Fraïssé ont un groupe d'automorphismes extrêmement moyennable) :

Conséquences 5, continuées

Corollaire.

Les classes suivantes sont Ramsey (et leurs limites de Fraïssé ont un groupe d'automorphismes extrêmement moyennable) :

- La classe de toutes les permutations d'un ensemble fini (représentées par deux ordres linéaires)

Conséquences 5, continuées

Corollaire.

Les classes suivantes sont Ramsey (et leurs limites de Fraïssé ont un groupe d'automorphismes extrêmement moyennable) :

- La classe de toutes les permutations d'un ensemble fini (représentées par deux ordres linéaires)
- La classe de toutes les structures équipées par n ordres linéaires

Conséquences 5, continuées

Corollaire.

Les classes suivantes sont Ramsey (et leurs limites de Fraïssé ont un groupe d'automorphismes extrêmement moyennable) :

- La classe de toutes les permutations d'un ensemble fini (représentées par deux ordres linéaires)
- La classe de toutes les structures équipées par n ordres linéaires
- La classe des posets avec une extension linéaire et une relation de graphe

Conséquences 5, continuées

Corollaire.

Les classes suivantes sont Ramsey (et leurs limites de Fraïssé ont un groupe d'automorphismes extrêmement moyennable) :

- La classe de toutes les permutations d'un ensemble fini (représentées par deux ordres linéaires)
- La classe de toutes les structures équipées par n ordres linéaires
- La classe des posets avec une extension linéaire et une relation de graphe
- La classe de toutes les C-relations avec une ordre linéaire convexe, et avec une relation de tournois
- ...

Application : CSPs

Application : CSPs

Definition (CSP(Γ))

Application : CSPs

Definition (CSP(Γ))

Entrée : une structure finie A de la même signature que Γ.

Question : Existe-t-il un homomorphisme de A à Γ?

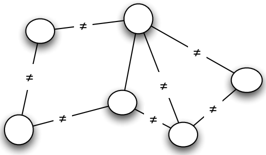
Application : CSPs

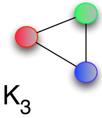
Definition (CSP(Γ))

Entrée : une structure finie A de la même signature que Γ.

Question : Existe-t-il un homomorphisme de A à Γ?

Exemple 1: CSP(K_3) est la 3-colorabilité





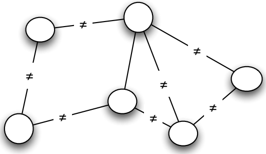
Application : CSPs

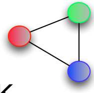
Definition (CSP(Γ))

Entrée : une structure finie A de la même signature que Γ.

Question : Existe-t-il un homomorphisme de A à Γ?

Exemple 1: CSP(K_3) est la 3-colorabilité





Exemple 2: Le test d'acyclicité d'un graphe orienté est CSP$((\mathbb{Q};<))$

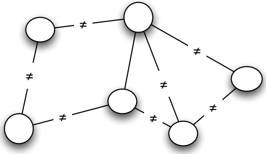
Application : CSPs

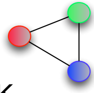
Definition (CSP(Γ))

Entrée : une structure finie A de la même signature que Γ.

Question : Existe-t-il un homomorphisme de A à Γ?

Exemple 1: CSP(K_3) est la 3-colorabilité





Exemple 2: Le test d'acyclicité d'un graphe orienté est CSP$\big((\mathbb{Q};<)\big)$

Γ **fini :** exemples dans la satisfiabilité propositionnelle et la théorie des graphes.

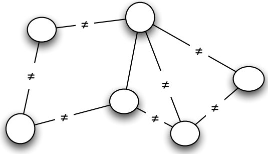
Application : CSPs

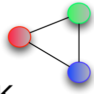
Definition (CSP(Γ))

Entrée : une structure finie A de la même signature que Γ.

Question : Existe-t-il un homomorphisme de A à Γ?

Exemple 1: CSP(K_3) est la 3-colorabilité





K_3

Exemple 2: Le test d'acyclicité d'un graphe orienté est CSP$((\mathbb{Q}; <))$

Γ **fini :** exemples dans la satisfiabilité propositionnelle et la théorie des graphes.

Γ **infini:** nombre d'exemples dans l'intelligence artificielle, la linguistique informatique, la bio-informatique, l'ordonnancement, ...

Classification de Complexité

Soit $\Gamma = (\mathbb{Q}; R_1, R_2, \dots)$ une structure avec une définition de la logique du premier ordre sur $(\mathbb{Q}; <)$.

Classification de Complexité

Soit $\Gamma = (\mathbb{Q}; R_1, R_2, \dots)$ une structure avec une définition de la logique du premier ordre sur $(\mathbb{Q}; <)$.

Exemple 1: $\Gamma := \big(\mathbb{Q}; \{(x, y, z) \mid (x < y < z) \vee (z < y < x)\}\big)$.

Classification de Complexité

Soit $\Gamma = (\mathbb{Q}; R_1, R_2, \dots)$ une structure avec une définition de la logique du premier ordre sur $(\mathbb{Q}; <)$.

Exemple 1: $\Gamma := \big(\mathbb{Q}; \{(x, y, z) \mid (x < y < z) \vee (z < y < x)\}\big)$.
Ici, CSP(Γ) est le problème de Betweenness (Opatrny).

Classification de Complexité

Soit $\Gamma = (\mathbb{Q}; R_1, R_2, \dots)$ une structure avec une définition de la logique du premier ordre sur $(\mathbb{Q}; <)$.

Exemple 1: $\Gamma := \big(\mathbb{Q}; \{(x,y,z) \mid (x < y < z) \vee (z < y < x)\}\big)$.
Ici, CSP(Γ) est le problème de Betweenness (Opatrny).

Exemple 2: $\Gamma := \big(\mathbb{Q}; \{(x,y,z) \mid (x < y < z) \vee (z < x < y) \vee (y < z < x)\}\big)$.

Classification de Complexité

Soit $\Gamma = (\mathbb{Q}; R_1, R_2, \dots)$ une structure avec une définition de la logique du premier ordre sur $(\mathbb{Q}; <)$.

Exemple 1: $\Gamma := \big(\mathbb{Q}; \{(x, y, z) \mid (x < y < z) \vee (z < y < x)\}\big)$.
Ici, CSP(Γ) est le problème de Betweenness (Opatrny).

Exemple 2: $\Gamma := \big(\mathbb{Q}; \{(x, y, z) \mid (x < y < z) \vee (z < x < y) \vee (y < z < x)\}\big)$.
Ici, CSP(Γ) et le problème de l'Ordonnancement cyclic (Galil-Meggido).

Classification de Complexité

Soit $\Gamma = (\mathbb{Q}; R_1, R_2, \dots)$ une structure avec une définition de la logique du premier ordre sur $(\mathbb{Q}; <)$.

Exemple 1: $\Gamma := \big(\mathbb{Q}; \{(x,y,z) \mid (x<y<z) \vee (z<y<x)\}\big)$.
Ici, CSP(Γ) est le problème de Betweenness (Opatrny).

Exemple 2: $\Gamma := \big(\mathbb{Q}; \{(x,y,z) \mid (x<y<z) \vee (z<x<y) \vee (y<z<x)\}\big)$.
Ici, CSP(Γ) et le problème de l'Ordonnancement cyclic (Galil-Meggido).

Exemple 3: $\Gamma := (\mathbb{Q}; \leq, \neq, <)$.

Classification de Complexité

Soit $\Gamma = (\mathbb{Q}; R_1, R_2, \dots)$ une structure avec une définition de la logique du premier ordre sur $(\mathbb{Q}; <)$.

Exemple 1: $\Gamma := \big(\mathbb{Q}; \{(x,y,z) \mid (x<y<z) \vee (z<y<x)\}\big)$.
Ici, CSP(Γ) est le problème de Betweenness (Opatrny).

Exemple 2: $\Gamma := \big(\mathbb{Q}; \{(x,y,z) \mid (x<y<z) \vee (z<x<y) \vee (y<z<x)\}\big)$.
Ici, CSP(Γ) et le problème de l'Ordonnancement cyclic (Galil-Meggido).

Exemple 3: $\Gamma := (\mathbb{Q}; \leq, \neq, <)$.
Ici, CSP(Γ) est le problème de la satisfiabilité des reseaux de l'algèbre des points dans l'intelligence artificielle.

Classification de Complexité

Soit $\Gamma = (\mathbb{Q}; R_1, R_2, \dots)$ une structure avec une définition de la logique du premier ordre sur $(\mathbb{Q}; <)$.

Exemple 1: $\Gamma := \big(\mathbb{Q}; \{(x, y, z) \mid (x < y < z) \vee (z < y < x)\}\big)$.
Ici, CSP(Γ) est le problème de Betweenness (Opatrny).

Exemple 2: $\Gamma := \big(\mathbb{Q}; \{(x, y, z) \mid (x < y < z) \vee (z < x < y) \vee (y < z < x)\}\big)$.
Ici, CSP(Γ) et le problème de l'Ordonnancement cyclic (Galil-Meggido).

Exemple 3: $\Gamma := (\mathbb{Q}; \leq, \neq, <)$.
Ici, CSP(Γ) est le problème de la satisfiabilité des reseaux de l'algèbre des points dans l'intelligence artificielle.

Théorème (B.-Kara'10).

Pour toute structure Γ dont les relations sont définies par des formules de la logique du premier ordre sur $(\mathbb{Q}; <)$, le problème CSP(Γ) est soit dans P, soit NP-complet.

Techniques de preuve

Soit $\Gamma = (\mathbb{Q}; R_1, R_2, \dots)$ où toute relation R_i est définie par une formule du premier ordre sur $(\mathbb{Q}; <)$.

Techniques de preuve

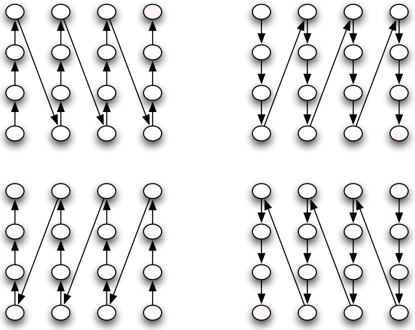
Soit $\Gamma = (\mathbb{Q}; R_1, R_2, \dots)$ où toute relation R_i est définie par une formule du premier ordre sur $(\mathbb{Q}; <)$.

Proposition. S'il existe un homomorphisme injectif de Γ^2 à Γ, alors il y a aussi un des homomorphismes de Γ^2 à Γ suivants :

Techniques de preuve

Soit $\Gamma = (\mathbb{Q}; R_1, R_2, \dots)$ où toute relation R_i est définie par une formule du premier ordre sur $(\mathbb{Q}; <)$.

Proposition. S'il existe un homomorphisme injectif de Γ^2 à Γ, alors il y a aussi un des homomorphismes de Γ^2 à Γ suivants :



La preuve

Pour $f, g : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}$ on définit $f \sim g$ ssi
il existe $\alpha \in G := \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}; <)$ tel que $\forall x, y \in \mathbb{Q}.\ f(x, y) = \alpha g(x, y)$.

La preuve

Pour $f, g : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}$ on définit $f \sim g$ ssi
il existe $\alpha \in G := \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}; <)$ tel que $\forall x, y \in \mathbb{Q}.\ f(x, y) = \alpha g(x, y)$.

1 Espace : $\mathrm{Hom}(\Gamma^2, \Gamma)/G$.

La preuve

Pour $f, g : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}$ on définit $f \sim g$ ssi
il existe $\alpha \in G := \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}; <)$ tel que $\forall x, y \in \mathbb{Q}.\ f(x, y) = \alpha g(x, y)$.

1 Espace : $\mathrm{Hom}(\Gamma^2, \Gamma)/G$.

2 Ramsey + KPT: G est extrêmement moyennable.

La preuve

Pour $f, g : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}$ on définit $f \sim g$ ssi
il existe $\alpha \in G := \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}; <)$ tel que $\forall x, y \in \mathbb{Q}.\ f(x, y) = \alpha g(x, y)$.

1 Espace : $\mathrm{Hom}(\Gamma^2, \Gamma)/G$.

2 Ramsey + KPT: G est extrêmement moyennable.

3 Transfert : G^2 est extrêmement moyennable.

La preuve

Pour $f, g : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}$ on définit $f \sim g$ ssi
il existe $\alpha \in G := \mathrm{Aut}(\mathbb{Q};<)$ tel que $\forall x, y \in \mathbb{Q}.\ f(x, y) = \alpha g(x, y)$.

1 Espace : $\mathrm{Hom}(\Gamma^2, \Gamma)/G$.

2 Ramsey + KPT: G est extrêmement moyennable.

3 Transfert : G^2 est extrêmement moyennable.

4 Action : G^2 opère sur $\mathrm{Hom}(\Gamma^2, \Gamma)/G$: on définit
$(\alpha, \beta) \cdot f/G = \big((x, y) \mapsto (f(\alpha x, \beta y)/G)\big)$.

La preuve

Pour $f, g : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}$ on définit $f \sim g$ ssi
il existe $\alpha \in G := \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}; <)$ tel que $\forall x, y \in \mathbb{Q}.\ f(x,y) = \alpha g(x,y)$.

1 Espace : $\mathrm{Hom}(\Gamma^2, \Gamma)/G$.

2 Ramsey + KPT: G est extrêmement moyennable.

3 Transfert : G^2 est extrêmement moyennable.

4 Action : G^2 opère sur $\mathrm{Hom}(\Gamma^2, \Gamma)/G$: on définit
$(\alpha, \beta) \cdot f/G = \big((x,y) \mapsto (f(\alpha x, \beta y)/G)\big)$.

5 On utilise l'extrême moyennabilité : cette action a un point fixe, F.

La preuve

Pour $f, g : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}$ on définit $f \sim g$ ssi
il existe $\alpha \in G := \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}; <)$ tel que $\forall x, y \in \mathbb{Q}.\ f(x, y) = \alpha g(x, y)$.

1 Espace : $\mathrm{Hom}(\Gamma^2, \Gamma)/G$.

2 Ramsey + KPT: G est extrêmement moyennable.

3 Transfert : G^2 est extrêmement moyennable.

4 Action : G^2 opère sur $\mathrm{Hom}(\Gamma^2, \Gamma)/G$: on définit
$(\alpha, \beta) \cdot f/G = \big((x, y) \mapsto (f(\alpha x, \beta y)/G)\big)$.

5 On utilise l'extrême moyennabilité : cette action a un point fixe, F.

6 L'interpretation du point fixe : Pour tout $f \in F$, tout $n \geq 2$, et tous
$\alpha_1, \alpha_2 \in G$ il existe $\beta \in G$ tel que $f(s, t) = \beta f(\alpha_1 s, \alpha_2 t)$ pour tous $s, t \in \mathbb{Q}^n$.

La preuve

Pour $f, g : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}$ on définit $f \sim g$ ssi
il existe $\alpha \in G := \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}; <)$ tel que $\forall x, y \in \mathbb{Q}.\ f(x,y) = \alpha g(x,y)$.

1 Espace : $\mathrm{Hom}(\Gamma^2, \Gamma)/G$.

2 Ramsey + KPT: G est extrêmement moyennable.

3 Transfert : G^2 est extrêmement moyennable.

4 Action : G^2 opère sur $\mathrm{Hom}(\Gamma^2, \Gamma)/G$: on définit
$(\alpha, \beta) \cdot f/G = \big((x,y) \mapsto (f(\alpha x, \beta y)/G)\big)$.

5 On utilise l'extrême moyennabilité : cette action a un point fixe, F.

6 L'interpretation du point fixe : Pour tout $f \in F$, tout $n \geq 2$, et tous
$\alpha_1, \alpha_2 \in G$ il existe $\beta \in G$ tel que $f(s,t) = \beta f(\alpha_1 s, \alpha_2 t)$ pour tous $s, t \in \mathbb{Q}^n$.
Il n'existe que quatre 'comportements' des fonctions f avec cette propriété.

Problèmes ouverts

Problèmes ouverts

1. Est-ce qu'on peut enrichir toute structure homogène avec une signature relationnelle finie par un nombre fini de relations telles que l'expansion soit homogène et Ramsey ?
2. Soit Γ une structure ω-catégorique. Existe-t-il toujours un sous-groupe de G qui est extrêmement moyennable et également le groupe d'automorphismes d'une structure ω-catégorique ?

Problèmes ouverts

1. Est-ce qu'on peut enrichir toute structure homogène avec une signature relationnelle finie par un nombre fini de relations telles que l'expansion soit homogène et Ramsey ?
2. Soit Γ une structure ω-catégorique. Existe-t-il toujours un sous-groupe de G qui est extrêmement moyennable et également le groupe d'automorphismes d'une structure ω-catégorique ?

Je suis plutôt optimiste
(mais peut-être je prends mes désirs pour des réalités . . .)

Problèmes ouverts

1. Est-ce qu'on peut enrichir toute structure homogène avec une signature relationnelle finie par un nombre fini de relations telles que l'expansion soit homogène et Ramsey ?
2. Soit Γ une structure ω-catégorique. Existe-t-il toujours un sous-groupe de G qui est extrêmement moyennable et également le groupe d'automorphismes d'une structure ω-catégorique ?

Je suis plutôt optimiste
(mais peut-être je prends mes désirs pour des réalités . . .)

Également ouvert: la classe des treillis est-elle une classe d'amalgamation ?