Partitions aléatoires choisies suivant les poids des traces de Markov des algèbres d'Hecke

Pierre-Loïc Méliot

IGM-LabInfo
Université Paris-Est Marne-La-Vallée

1er mars 2011

Soit A une algèbre semi-simple complexe de dimension finie, et $\widehat{A}$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de A-modules irréductibles. Si $V^\lambda \in \widehat{A}$, on notera ζ^λ le caractère correspondant, et χ^λ le caractère normalisé par la dimension $\dim V^\lambda$.

Soit A une algèbre semi-simple complexe de dimension finie, et $\widehat{A}$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de A-modules irréductibles. Si $V^\lambda \in \widehat{A}$, on notera ζ^λ le caractère correspondant, et χ^λ le caractère normalisé par la dimension $\dim V^\lambda$.

Les χ^λ sont des **traces** normalisées, c'est-à-dire des formes linéaires $\tau : A \to \mathbb{C}$ vérifiant :

$$\tau(1_A) = 1 \qquad ; \qquad \forall a, b \in A,\;\; \tau(ab) = \tau(ba).$$

Toute trace sur A se décompose de façon unique comme combinaison linéaire de caractères irréductibles.

Soit A une algèbre semi-simple complexe de dimension finie, et $\widehat{A}$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de A-modules irréductibles. Si $V^\lambda \in \widehat{A}$, on notera ζ^λ le caractère correspondant, et χ^λ le caractère normalisé par la dimension $\dim V^\lambda$.

Les χ^λ sont des **traces** normalisées, c'est-à-dire des formes linéaires $\tau : A \to \mathbb{C}$ vérifiant :

$$\tau(1_A) = 1 \qquad ; \qquad \forall a, b \in A,\ \ \tau(ab) = \tau(ba).$$

Toute trace sur A se décompose de façon unique comme combinaison linéaire de caractères irréductibles.

Définition (Mesure spectrale)

On appelle ***mesure spectrale*** *d'une trace τ la mesure de probabilité sur $\widehat{A}$ définie par l'identité*

$$\tau = \sum_{\lambda \in \widehat{A}} \mathbb{P}_\tau[\lambda]\, \chi^\lambda.$$

Considérons par exemple un groupe fini G et un G-module V. On peut écrire

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \widehat{G}} m_\lambda \, V^\lambda, \quad m_\lambda \in \mathbb{N}.$$

Alors, la mesure spectrale du caractère χ^V s'écrit $\mathbb{P}_V[\lambda] = \frac{m_\lambda \, \dim V^\lambda}{\dim V}$.

Considérons par exemple un groupe fini G et un G-module V. On peut écrire

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \widehat{G}} m_\lambda \, V^\lambda, \quad m_\lambda \in \mathbb{N}.$$

Alors, la mesure spectrale du caractère χ^V s'écrit $\mathbb{P}_V[\lambda] = \frac{m_\lambda \dim V^\lambda}{\dim V}$.

On considère maintenant une famille d'algèbres $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et une famille de traces $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$; on note $(\mathbb{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la famille des mesures de probabilité correspondantes.

Questions

1. Peut-on énoncer des résultats probabilistes asymptotiques pour les mesures spectrales $\mathbb{P}_n$? (loi des grands nombres, théorème central limite, *etc.*)
2. Peut-on donner une interprétation combinatoire des mesures $\mathbb{P}_n$?

Le premier cas étudié fut celui des traces régulières des groupes symétriques $\mathfrak{S}_n$; dans ce cas, la mesure $\mathbb{P}_n$, appelée **mesure de Plancherel**, porte sur l'ensemble $\mathfrak{Y}_n$ des partitions d'entiers de taille n, et s'écrit

$$\mathbb{P}_n[\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r)] = \frac{(\dim \lambda)^2}{n!}.$$

Le premier cas étudié fut celui des traces régulières des groupes symétriques $\mathfrak{S}_n$; dans ce cas, la mesure $\mathbb{P}_n$, appelée **mesure de Plancherel**, porte sur l'ensemble $\mathfrak{Y}_n$ des partitions d'entiers de taille n, et s'écrit

$$\mathbb{P}_n[\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r)] = \frac{(\dim \lambda)^2}{n!}.$$

1977 : loi des grands nombres (Logan-Shepp, Kerov-Vershik).
1993 : théorème central limite (Kerov, Ivanov-Olshanski, Śniady).
2000 : lien avec les matrices aléatoires (Baik-Deift-Johansson, Okounkov).

Le premier cas étudié fut celui des traces régulières des groupes symétriques $\mathfrak{S}_n$; dans ce cas, la mesure $\mathbb{P}_n$, appelée **mesure de Plancherel**, porte sur l'ensemble $\mathfrak{Y}_n$ des partitions d'entiers de taille n, et s'écrit

$$\mathbb{P}_n[\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r)] = \frac{(\dim \lambda)^2}{n!}.$$

1977 : loi des grands nombres (Logan-Shepp, Kerov-Vershik).
1993 : théorème central limite (Kerov, Ivanov-Olshanski, Śniady).
2000 : lien avec les matrices aléatoires (Baik-Deift-Johansson, Okounkov).

On se propose d'étudier des (q, t)-déformations de ce premier modèle :

- q : passage de $\mathfrak{S}_n$ à son **algèbre d'Hecke** $\mathscr{H}_q(\mathfrak{S}_n)$;
- t : passage de la trace régulière à une classe de traces plus générales, les **traces de Markov**.

1. (q, t)-mesures de Plancherel
   - Traces de Markov des algèbres d'Hecke
   - q-formule de Frobenius et poids des caractères
   - (q, t)-déformation de la mesure de Plancherel
2. Lien avec les permutations aléatoires
   - Descentes d'un tableau standard ou d'une permutation
   - Fonctions quasi-symétriques et développement des fonctions de Schur
   - Mesures sur $\mathfrak{S}_n$ correspondant aux (q, t)-mesures de Plancherel
3. Résultats asymptotiques
   - Loi des grands nombres
   - Théorème central limite

1. (q, t)-mesures de Plancherel
   - Traces de Markov des algèbres d'Hecke
   - q-formule de Frobenius et poids des caractères
   - (q, t)-déformation de la mesure de Plancherel
2. Lien avec les permutations aléatoires
   - Descentes d'un tableau standard ou d'une permutation
   - Fonctions quasi-symétriques et développement des fonctions de Schur
   - Mesures sur $\mathfrak{S}_n$ correspondant aux (q, t)-mesures de Plancherel
3. Résultats asymptotiques
   - Loi des grands nombres
   - Théorème central limite

Algèbre d'Hecke du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$

On note $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de $[\![1, n]\!]$. C'est un groupe de Coxeter engendré par les transpositions $s_i = (i, i+1)$ et de présentation

$$\begin{cases} \forall i \in [\![1, n-1]\!]\,,\;\; (s_i)^2 = 1\,; \\ \forall i \in [\![1, n-2]\!]\,,\;\; s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}\,; \\ \forall i, j,\;\; |j-i| \geq 2 \Rightarrow s_i s_j = s_j s_i. \end{cases}$$

Algèbre d'Hecke du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$

On note $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de $[\![1,n]\!]$. C'est un groupe de Coxeter engendré par les transpositions $s_i = (i, i+1)$ et de présentation

$$\begin{cases} \forall i \in [\![1,n-1]\!]\,,\ \ (s_i)^2 = 1\,; \\ \forall i \in [\![1,n-2]\!]\,,\ \ s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}\,; \\ \forall i,j,\ \ |j-i| \geq 2 \Rightarrow s_i s_j = s_j s_i. \end{cases}$$

L'**algèbre d'Iwahori-Hecke** de $\mathfrak{S}_n$ est la $\mathbb{C}(q)$-algèbre $\mathscr{H}(\mathfrak{S}_n)$ engendrée par des éléments T_i vérifiant

$$\begin{cases} \forall i \in [\![1,n-1]\!]\,,\ \ (T_i - q)(T_i + 1) = 0\,; \\ \forall i \in [\![1,n-2]\!]\,,\ \ T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1}\,; \\ \forall i,j,\ \ |j-i| \geq 2 \Rightarrow T_i T_j = T_j T_i. \end{cases}$$

Une $\mathbb{C}(q)$-base de $\mathscr{H}(\mathfrak{S}_n)$ est constituée des $T_\omega = T_{i_1} T_{i_2} \cdots T_{i_r}$, où $\omega = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_r}$ est une décomposition réduite et ω parcourt $\mathfrak{S}_n$.

Structure des algèbres $\mathscr{H}(\mathfrak{S}_n)$

La $\mathbb{C}(q)$-algèbre $\mathscr{H}(\mathfrak{S}_n)$ est semi-simple et a la même théorie des représentations que $\mathfrak{S}_n$. Ainsi, ses modules irréductibles sont indexés par les partitions d'entiers de $\mathfrak{Y}_n$:

$$\mathscr{H}(\mathfrak{S}_n) = \bigoplus_{\lambda \vdash n} \mathrm{End}_{\mathbb{C}(q)}(V^\lambda).$$

Si q est non nul et n'est pas une racine non triviale de l'unité, l'algèbre spécialisée $\mathscr{H}_q(\mathfrak{S}_n)$ garde cette propriété (en tant que $\mathbb{C}$-algèbre).

Structure des algèbres $\mathscr{H}(\mathfrak{S}_n)$

La $\mathbb{C}(q)$-algèbre $\mathscr{H}(\mathfrak{S}_n)$ est semi-simple et a la même théorie des représentations que $\mathfrak{S}_n$. Ainsi, ses modules irréductibles sont indexés par les partitions d'entiers de $\mathfrak{Y}_n$:

$$\mathscr{H}(\mathfrak{S}_n) = \bigoplus_{\lambda \vdash n} \mathrm{End}_{\mathbb{C}(q)}(V^\lambda).$$

Si q est non nul et n'est pas une racine non triviale de l'unité, l'algèbre spécialisée $\mathscr{H}_q(\mathfrak{S}_n)$ garde cette propriété (en tant que $\mathbb{C}$-algèbre).

La **dualité de Schur-Weyl** entre les actions de $\mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$ et $\mathfrak{S}_n$ sur $(\mathbb{C}^m)^{\otimes n}$ peut être étendue aux actions de $U_q(\mathfrak{gl}(m))$ et de $\mathscr{H}(\mathfrak{S}_n)$ sur $(\mathbb{C}(q)^m)^{\otimes n}$:

$$(\mathbb{C}(q)^m)^{\otimes n} = \bigoplus_{\substack{|\lambda|=n \\ \ell(\lambda)\leq m}} {}_{U_q(\mathfrak{gl}(m)) \curvearrowright}\left\{H^\lambda(m)\right\} \otimes_{\mathbb{C}(q)} \left\{V^\lambda\right\}_{\curvearrowleft \mathscr{H}(\mathfrak{S}_n)}.$$

Traces de Markov

Si $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_r) \in \mathfrak{Y}_n$, notons T_μ l'élément

$$(T_1 \cdots T_{\mu_1 - 1})(T_{\mu_1+1} \cdots T_{\mu_1+\mu_2-1}) \cdots (T_{\mu_1+\cdots+\mu_{r-1}+1} \cdots T_{\mu_1+\cdots+\mu_r-1}).$$

Tout élément $h \in \mathscr{H}(\mathfrak{S}_n)$ est congru modulo $[\mathscr{H}(\mathfrak{S}_n), \mathscr{H}(\mathfrak{S}_n)]$ à une unique combinaison linéaire d'éléments T_μ, $\mu \in \mathfrak{Y}_n$. Une trace sur $\mathscr{H}(\mathfrak{S}_n)$ est donc entièrement déterminée par la donnée des $\tau(T_\mu)$, $\mu \in \mathfrak{Y}_n$.

Traces de Markov

Si $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_r) \in \mathfrak{Y}_n$, notons T_μ l'élément

$$(T_1 \cdots T_{\mu_1 - 1})(T_{\mu_1+1} \cdots T_{\mu_1+\mu_2-1}) \cdots (T_{\mu_1+\cdots+\mu_{r-1}+1} \cdots T_{\mu_1+\cdots+\mu_r-1}).$$

Tout élément $h \in \mathscr{H}(\mathfrak{S}_n)$ est congru modulo $[\mathscr{H}(\mathfrak{S}_n), \mathscr{H}(\mathfrak{S}_n)]$ à une unique combinaison linéaire d'éléments T_μ, $\mu \in \mathfrak{Y}_n$. Une trace sur $\mathscr{H}(\mathfrak{S}_n)$ est donc entièrement déterminée par la donnée des $\tau(T_\mu)$, $\mu \in \mathfrak{Y}_n$.

Définition (Trace de Markov)

*Une **trace de Markov** sur l'algèbre $\mathscr{H}(\mathfrak{S}_n)$ est une trace normalisée vérifiant*

$$\forall k \geq 1,\ \ \forall a \in \mathscr{H}(\mathfrak{S}_k),\ \ \tau(T_k a) = z_k\, \tau(a).$$

Traces de Markov

Si $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_r) \in \mathfrak{Y}_n$, notons T_μ l'élément

$$(T_1 \cdots T_{\mu_1 - 1})(T_{\mu_1+1} \cdots T_{\mu_1+\mu_2-1}) \cdots (T_{\mu_1+\cdots+\mu_{r-1}+1} \cdots T_{\mu_1+\cdots+\mu_r-1}).$$

Tout élément $h \in \mathscr{H}(\mathfrak{S}_n)$ est congru modulo $[\mathscr{H}(\mathfrak{S}_n), \mathscr{H}(\mathfrak{S}_n)]$ à une unique combinaison linéaire d'éléments T_μ, $\mu \in \mathfrak{Y}_n$. Une trace sur $\mathscr{H}(\mathfrak{S}_n)$ est donc entièrement déterminée par la donnée des $\tau(T_\mu)$, $\mu \in \mathfrak{Y}_n$.

Définition (Trace de Markov)

*Une **trace de Markov** sur l'algèbre $\mathscr{H}(\mathfrak{S}_n)$ est une trace normalisée vérifiant*

$$\forall k \geq 1,\ \ \forall a \in \mathscr{H}(\mathfrak{S}_k),\ \ \tau(T_k a) = z_k\, \tau(a).$$

Comme les T_k sont tous conjugués, $\tau(T_k) = z_k = z$ ne dépend en fait pas de k. On peut montrer que pour tout paramètre z, il existe une unique trace de Markov correspondante τ_z, avec $\tau_z(T_\mu) = z^{|\mu| - \ell(\mu)}$.

q-formule de Frobenius

En utilisant la dualité de Schur-Weyl, on peut encoder les valeurs des caractères irréductibles de $\mathfrak{S}_n$ dans l'algèbre **Sym** des **fonctions symétriques** :

$$\forall \mu \in \mathfrak{Y}_n, \quad p_\mu(X) = \sum_{\lambda \vdash n} \zeta^\lambda(\sigma_\mu)\, s_\lambda(X).$$

q-formule de Frobenius

En utilisant la dualité de Schur-Weyl, on peut encoder les valeurs des caractères irréductibles de $\mathfrak{S}_n$ dans l'algèbre **Sym** des **fonctions symétriques** :

$$\forall \mu \in \mathfrak{Y}_n, \quad p_\mu(X) = \sum_{\lambda \vdash n} \zeta^\lambda(\sigma_\mu)\, s_\lambda(X).$$

Avec les notations de λ-anneaux, notons $q_\mu(X;q) = \frac{h_\mu(qX-X)}{(q-1)^{\ell(\mu)}}$; c'est un élement de $\mathbf{Sym} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(q)$. En utilisant la version quantique de la dualité de Schur-Weyl :

Théorème (Ram)

$$\forall \mu \in \mathfrak{Y}_n, \quad q_\mu(X;q) = \sum_{\lambda \vdash n} \zeta_q^\lambda(T_\mu)\, s_\lambda(X).$$

(q, z)-spécialisation de l'algèbre **Sym**

Soit $X_{q,z} = \frac{[1-q+z]-[z]}{1-[q]}$ l'alphabet formel dont les fonctions symétriques sont données par les spécialisations

$$p_k(X_{q,z}) = \frac{(1-q+z)^k - z^k}{1-q^k}.$$

(q, z)-spécialisation de l'algèbre **Sym**

Soit $X_{q,z} = \frac{[1-q+z]-[z]}{1-[q]}$ l'alphabet formel dont les fonctions symétriques sont données par les spécialisations

$$p_k(X_{q,z}) = \frac{(1-q+z)^k - z^k}{1-q^k}.$$

Si $Y_{q,z} = qX_{q,z} - X_{q,z}$, on remarque que

$$P(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k(Y_{q,z})}{k}\, u^k = \log \frac{1-u(1-q+z)}{1-uz}\,;$$

$$H(u) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k(Y_{q,z})\, u^k = \exp P(u) = \frac{1-u(1-q+z)}{1-uz}\,;$$

donc $h_k(Y_{q,z}) = (q-1)\, z^{k-1}$ et $q_\mu(X_{q,z}; q) = z^{|\mu|-\ell(\mu)} = \tau_z(T_\mu)$.

Poids des caractères irréductibles pour la trace τ_z

On en déduit la décomposition de τ_z dans la base des caractères irréductibles :

$$\tau_z(T_\mu) = q_\mu(X_{q,z};q) = \sum_{\lambda\vdash n} \zeta_q^\lambda(T_\mu)\, s_\lambda(X_{q,z}) \;\Rightarrow\; \tau_z = \sum_{\lambda\vdash n} s_\lambda(X_{q,z})\,\zeta_q^\lambda.$$

Poids des caractères irréductibles pour la trace τ_z

On en déduit la décomposition de τ_z dans la base des caractères irréductibles :

$$\tau_z(T_\mu) = q_\mu(X_{q,z};q) = \sum_{\lambda \vdash n} \zeta_q^\lambda(T_\mu)\, s_\lambda(X_{q,z}) \Rightarrow \tau_z = \sum_{\lambda \vdash n} s_\lambda(X_{q,z})\, \zeta_q^\lambda.$$

Il existe une formule des équerres pour la spécialisation $s_\lambda(X_{q,z})$ des fonctions de Schur :

$$s_\lambda\left(\frac{[1-q+z]-[z]}{1-[q]}\right) = q^{b(\lambda)} \prod_{\Box \in \lambda} \frac{(1-q)+z(1-q^{c(\Box)})}{1-q^{h(\Box)}},$$

où $b(\lambda) = \sum_{i=1}^{\ell(\lambda)}(i-1)\lambda_i$, $h(\Box)$ est la longueur d'équerre de la case $\Box$ et $c(\Box)$ est son contenu.

(q, t)-mesure de Plancherel

Posons $z = -(1-q)(1-t)$. Le poids $s_\lambda(X_{q,z})$ s'écrit alors

$$s_\lambda(X_{q,z}) = q^{b(\lambda)} \left(\prod_{\square \in \lambda} \frac{1-q}{1-q^{h(\square)}} \right) \left(\prod_{\square \in \lambda} t + (1-t) q^{c(\square)} \right),$$

et si q et t sont dans $]0,1[$, ce poids reste positif pour toute partition λ.

(q,t)-mesure de Plancherel

Posons $z = -(1-q)(1-t)$. Le poids $s_\lambda(X_{q,z})$ s'écrit alors

$$s_\lambda(X_{q,z}) = q^{b(\lambda)} \left(\prod_{\square\in\lambda} \frac{1-q}{1-q^{h(\square)}}\right) \left(\prod_{\square\in\lambda} t+(1-t)q^{c(\square)}\right),$$

et si q et t sont dans $]0,1[$, ce poids reste positif pour toute partition λ.

Définition ((q,t)-mesure de Plancherel)

On appelle ***(q,t)-mesure de Plancherel*** *la mesure spectrale portant sur $\mathfrak{Y}_n$ et correspondant à la décomposition de la trace τ_z de l'algèbre $\mathscr{H}_q(\mathfrak{S}_n)$, avec $q,t \in]0,1[$. C'est une vraie mesure de probabilité.*

$$\mathbb{P}_{n,q,t}[\lambda] = (\dim\lambda)\,(1-q)^n\, s_\lambda\left(\frac{[t]-[t-1]}{1-[q]}\right).$$

Deux cas particuliers

Si $t = 1$, on obtient la **q-mesure de Plancherel**, qui correspond à la décomposition de la trace régulière de l'algèbre d'Hecke, ou, par dualité d'Iwahori, à la décomposition du $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)$-module $\mathbb{C}[\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)/\mathrm{B}(n, \mathbb{F}_q)]$:

$$\chi^{\mathbb{C}[\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_q/\mathrm{B}(n,\mathbb{F}_q)]} = \sum_{\lambda \vdash n} \mathbb{P}_{n,q}[\lambda]\, U_q^{\lambda},$$

où U_q^{λ} désigne le caractère irréductible unipotent de type λ.

Deux cas particuliers

Si $t = 1$, on obtient la **q-mesure de Plancherel**, qui correspond à la décomposition de la trace régulière de l'algèbre d'Hecke, ou, par dualité d'Iwahori, à la décomposition du $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)$-module $\mathbb{C}[\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)/\mathrm{B}(n, \mathbb{F}_q)]$:

$$\chi^{\mathbb{C}[\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_q/\mathrm{B}(n,\mathbb{F}_q)]} = \sum_{\lambda \vdash n} \mathbb{P}_{n,q}[\lambda]\, U_q^{\lambda},$$

où U_q^{λ} désigne le caractère irréductible unipotent de type λ.

Si $q = 1$, on obtient la **mesure de Plancherel**, qui correspond à la décomposition de la trace régulière de l'algèbre du groupe symétrique :

$$\tau(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. (q,t)-mesures de Plancherel
   - Traces de Markov des algèbres d'Hecke
   - q-formule de Frobenius et poids des caractères
   - (q,t)-déformation de la mesure de Plancherel

2. Lien avec les permutations aléatoires
   - Descentes d'un tableau standard ou d'une permutation
   - Fonctions quasi-symétriques et développement des fonctions de Schur
   - Mesures sur $\mathfrak{S}_n$ correspondant aux (q,t)-mesures de Plancherel

3. Résultats asymptotiques
   - Loi des grands nombres
   - Théorème central limite

Tableaux standards et leurs descentes

On souhaite donner une interprétation combinatoire des (q, t)-mesures de Plancherel. Si λ est une partition, on la représente par son diagramme de Young, et on appelle **tableau standard** de forme λ une numérotation croissante suivant les lignes et les colonnes des cases de λ.

Tableaux standards et leurs descentes

On souhaite donner une interprétation combinatoire des (q, t)-mesures de Plancherel. Si λ est une partition, on la représente par son diagramme de Young, et on appelle **tableau standard** de forme λ une numérotation croissante suivant les lignes et les colonnes des cases de λ.

Exemple : $\begin{array}{|c|c|c|} \cline{1-1} 6 \\ \cline{1-2} 5 & 7 \\ \hline 3 & 4 & 9 \\ \hline 1 & 2 & 8 \\ \hline \end{array}$ est un tableau standard de forme $(3, 3, 2, 1)$.

Tableaux standards et leurs descentes

On souhaite donner une interprétation combinatoire des (q, t)-mesures de Plancherel. Si λ est une partition, on la représente par son diagramme de Young, et on appelle **tableau standard** de forme λ une numérotation croissante suivant les lignes et les colonnes des cases de λ.

Exemple : $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-2} 5 & 7 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline 3 & 4 & 9 \\ \hline 1 & 2 & 8 \\ \hline \end{array}$ est un tableau standard de forme $(3, 3, 2, 1)$.

$$D(T) = \{2, 4, 5, 8\} \quad ; \quad \mathrm{maj}(T) = 19.$$

Définition (Descentes d'un tableau standard)

*Les **descentes** d'un tableau standard T sont les indices $i \in [\![1, n-1]\!]$ tels que $i + 1$ apparaît dans une ligne située strictement au-dessus de la ligne contenant i. L'**indice majeur** d'un tableau est la somme de ses descentes.*

Descentes d'une permutation ou d'une composition

On a également une notion de descentes :

- pour une **composition** $c = (c_1, \ldots, c_r)$: il s'agit des entiers $c_1, c_1 + c_2, \ldots, c_1 + \cdots + c_{r-1}$, et ils déterminent entièrement une composition de taille n.

Descentes d'une permutation ou d'une composition

On a également une notion de descentes :

- pour une **composition** $c = (c_1, \dots, c_r)$: il s'agit des entiers $c_1, c_1 + c_2, \dots, c_1 + \dots + c_{r-1}$, et ils déterminent entièrement une composition de taille n.
- pour une **permutation** σ : il s'agit des entiers i tels que $\sigma(i+1) < \sigma(i)$.

Descentes d'une permutation ou d'une composition

On a également une notion de descentes :

- pour une **composition** $c = (c_1, \dots, c_r)$: il s'agit des entiers $c_1, c_1 + c_2, \dots, c_1 + \cdots + c_{r-1}$, et ils déterminent entièrement une composition de taille n.
- pour une **permutation** σ : il s'agit des entiers i tels que $\sigma(i+1) < \sigma(i)$.

Exemple : les descentes de la composition $(4, 2, 2, 1, 3)$ sont $\{4, 6, 8, 9\}$, et les descentes de la permutation 27351684 sont $\{2, 4, 7\}$.

Descentes d'une permutation ou d'une composition

On a également une notion de descentes :

- pour une **composition** $c = (c_1, \ldots, c_r)$: il s'agit des entiers $c_1, c_1 + c_2, \ldots, c_1 + \cdots + c_{r-1}$, et ils déterminent entièrement une composition de taille n.
- pour une **permutation** σ : il s'agit des entiers i tels que $\sigma(i+1) < \sigma(i)$.

Exemple : les descentes de la composition $(4, 2, 2, 1, 3)$ sont $\{4, 6, 8, 9\}$, et les descentes de la permutation 27351684 sont $\{2, 4, 7\}$.

Proposition (Descentes et algorithme RSK)

Si σ est une permutation et si $P(\sigma)$ et $Q(\sigma)$ sont les deux tableaux standards associés à σ par l'algorithme RSK, alors $D(\sigma) = D(Q(\sigma))$.

Si T est un tableau standard, on notera $c(T)$ l'unique composition de taille n telle que $D(T) = D(c(T))$. On définit de même $c(\sigma)$ pour une permutation σ.

Algèbre des fonctions quasi-symétriques

On rappelle qu'une série formelle f de degré borné en une infinité de variables $x_1, x_2, \ldots$ est une fonction **symétrique** si, pour tous indices $i_1 \neq i_2 \neq \cdots \neq i_r$ et $j_1 \neq j_2 \neq \cdots \neq j_r$,

$$\forall (a_1, \ldots, a_r) \in \mathbb{N}^r, \;\; [x_{i_1}^{a_1} \cdots x_{i_r}^{a_r}](f) = [x_{j_1}^{a_1} \cdots x_{j_r}^{a_r}](f).$$

Algèbre des fonctions quasi-symétriques

On rappelle qu'une série formelle f de degré borné en une infinité de variables $x_1, x_2, \ldots$ est une fonction **symétrique** si, pour tous indices $i_1 \neq i_2 \neq \cdots \neq i_r$ et $j_1 \neq j_2 \neq \cdots \neq j_r$,

$$\forall (a_1, \ldots, a_r) \in \mathbb{N}^r, \ \ [x_{i_1}^{a_1} \cdots x_{i_r}^{a_r}](f) = [x_{j_1}^{a_1} \cdots x_{j_r}^{a_r}](f).$$

Définition (Fonction quasi-symétrique)

On parle de fonction ***quasi-symétrique*** *si l'on a seulement, pour tous indices $i_1 < i_2 < \cdots < i_r$ et $j_1 < j_2 < \cdots < j_n$,*

$$\forall (a_1, \ldots, a_r) \in \mathbb{N}^r, \ \ [x_{i_1}^{a_1} \cdots x_{i_r}^{a_r}](f) = [x_{j_1}^{a_1} \cdots x_{j_r}^{a_r}](f).$$

Exemple : $M_{21} = \sum_{i<j} x_i^2 x_j$ est dans l'algèbre **QSym** des fonctions quasi-symétriques.

Fonctions quasi-symétriques monomiales et fondamentales

Une base linéaire de l'algèbre **QSym** est constituée des **fonctions monomiales**

$$M_{\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)} = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_r} x_{i_1}^{\alpha_1}\cdots x_{i_r}^{\alpha_r}$$

indexées par les compositions.

Fonctions quasi-symétriques monomiales et fondamentales

Une base linéaire de l'algèbre **QSym** est constituée des **fonctions monomiales**

$$M_{\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)} = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_r} x_{i_1}^{\alpha_1}\cdots x_{i_r}^{\alpha_r}$$

indexées par les compositions.

Une autre base est constituée des **fonctions fondamentales**

$$F_\alpha = \sum_{\substack{i_1\le i_2\le\cdots\le i_n \\ i_j<i_{j+1} \text{ si } j\in D(\alpha)}} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n},$$

et les deux bases sont reliées par les formules d'inversion de Möbius :

$$F_\alpha = \sum_{\alpha\preceq\beta} M_\beta \quad ; \quad M_\alpha = \sum_{\alpha\preceq\beta}(-1)^{\ell(\beta)-\ell(\alpha)}F_\beta.$$

Développement des fonctions de Schur

Théorème (Stanley)

Pour toute partition (gauche) λ,

$$s_\lambda = \sum_{T \in \mathrm{Std}(\lambda)} F_{c(T)}.$$

Développement des fonctions de Schur

Théorème (Stanley)

Pour toute partition (gauche) λ,

$$s_\lambda = \sum_{T \in \mathrm{Std}(\lambda)} F_{c(T)}.$$

On en déduit un développement combinatoire de la (q, t)-spécialisation de la fonction de Schur :

$$s_\lambda \left(\frac{[t] - [t-1]}{1 - [q]} \right) = \sum_{T \in \mathrm{Std}(\lambda)} F_{c(T)} \left(\frac{[t] - [t-1]}{1 - [q]} \right).$$

Développement des fonctions de Schur

Théorème (Stanley)

Pour toute partition (gauche) λ,

$$s_\lambda = \sum_{T \in \mathrm{Std}(\lambda)} F_{c(T)}.$$

On en déduit un développement combinatoire de la (q,t)-spécialisation de la fonction de Schur :

$$s_\lambda\left(\frac{[t]-[t-1]}{1-[q]}\right) = \sum_{T \in \mathrm{Std}(\lambda)} F_{c(T)}\left(\frac{[t]-[t-1]}{1-[q]}\right).$$

Lorsque $t=1$, la fonction $F_\alpha(\frac{1}{1-[q]})$ se calcule aisément :

$$F_\alpha\left(1,q,q^2,\ldots\right) = \frac{q^{\sum_{d \in D(\alpha)} n-d}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} = \frac{q^{\mathrm{comaj}(\alpha)}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}.$$

Utilisation de la structure de Hopf de **Sym** et **QSym**

Dans le cas général, pour calculer $F_\alpha(\frac{[t]-[t-1]}{1-[q]})$, on utilise la structure d'**algèbre de Hopf** sur **Sym** et **QSym** :

$$f(X+Y) = \Delta f(X,Y) \qquad ; \qquad f(X-Y) = [(1 \otimes \delta) \circ \Delta]\, f(X,-Y).$$

Utilisation de la structure de Hopf de **Sym** et **QSym**

Dans le cas général, pour calculer $F_\alpha(\frac{[t]-[t-1]}{1-[q]})$, on utilise la structure d'**algèbre de Hopf** sur **Sym** et **QSym** :

$$f(X+Y) = \Delta f(X,Y) \qquad ; \qquad f(X-Y) = [(1 \otimes \delta) \circ \Delta]\, f(X,-Y).$$

Pour toute composition α et tout entier $i \in [\![0,n]\!]$, notons $\alpha_{<i}$ (resp., $\alpha_{>i}$) la composition de taille i (resp., de taille $n-i$) telle que

$$D(\alpha_{<i}) = D(\alpha) \cap [\![1, i-1]\!] \qquad ; \qquad D(\alpha_{>i}) = (D(\alpha) \cap [\![i+1, n-1]\!]) - i.$$

D'autre part, si α est une composition, sa conjuguée $\overline{\alpha}$ est définie par $D(\overline{\alpha}) = D(\overleftarrow{\alpha})^c = [\![1, n-1]\!] \setminus \{\alpha_r, \alpha_r + \alpha_{r-1}, \ldots, \alpha_r + \cdots + \alpha_2\}$.

Utilisation de la structure de Hopf de **Sym** et **QSym**

Dans le cas général, pour calculer $F_\alpha(\frac{[t]-[t-1]}{1-[q]})$, on utilise la structure d'**algèbre de Hopf** sur **Sym** et **QSym** :

$$f(X+Y) = \Delta f(X,Y) \qquad ; \qquad f(X-Y) = [(1\otimes\delta)\circ\Delta]\, f(X,-Y).$$

Pour toute composition α et tout entier $i \in [\![0,n]\!]$, notons $\alpha_{<i}$ (resp., $\alpha_{>i}$) la composition de taille i (resp., de taille $n-i$) telle que

$$D(\alpha_{<i}) = D(\alpha)\cap[\![1,i-1]\!] \qquad ; \qquad D(\alpha_{>i}) = (D(\alpha)\cap[\![i+1,n-1]\!]) - i.$$

D'autre part, si α est une composition, sa conjuguée $\overline{\alpha}$ est définie par $D(\overline{\alpha}) = D(\overleftarrow{\alpha})^c = [\![1,n-1]\!] \setminus \{\alpha_r, \alpha_r+\alpha_{r-1},\dots,\alpha_r+\cdots+\alpha_2\}$.

Proposition (Coproduit et antipode des fonctions fondamentales)

$$\Delta(F_\alpha) = \sum_{i=0}^{n} F_{\alpha_{<i}}\otimes F_{\alpha_{>i}} \qquad ; \qquad \delta(F_\alpha) = F_{\overline{\alpha}}.$$

Interprétation combinatoire des poids des q-caractères

Pour toute composition α de taille n, notons

$$w_{q,t}(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} \frac{t^i\,(1-t)^{n-i}}{\{i!\}_q\,\{n-i!\}_q}\, q^{\mathrm{comaj}(\alpha_{<i})+\mathrm{comaj}(\overline{\alpha}_{>i})}.$$

Interprétation combinatoire des poids des q-caractères

Pour toute composition α de taille n, notons

$$w_{q,t}(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} \frac{t^i\,(1-t)^{n-i}}{\{i!\}_q\,\{n-i!\}_q}\, q^{\mathrm{comaj}(\alpha_{<i})+\mathrm{comaj}(\overline{\alpha}_{>i})}.$$

Théorème (M., 2011)

Pour toute partition $\lambda \in \mathfrak{Y}_n$,

$$\mathbb{P}_{n,q,t}[\lambda] = \sum_{P,Q\in \mathrm{Std}(\lambda)} w_{q,t}(c(Q)).$$

q-mesures et (q, t)-mesures sur les permutations

Notons ω_0 la permutation de taille n de longueur maximale, et pour tout mot m de longueur i,

$$\mathbb{Q}_{i,q}[m] = \frac{q^{\sum_{d \in D(m)} i-d}}{\{i!\}_q}.$$

Notons que $\mathbb{Q}_{n,q}$ est une mesure de probabilité sur $\mathfrak{S}_n$.

q-mesures et (q, t)-mesures sur les permutations

Notons ω_0 la permutation de taille n de longueur maximale, et pour tout mot m de longueur i,

$$\mathbb{Q}_{i,q}[m] = \frac{q^{\sum_{d \in D(m)} i-d}}{\{i!\}_q}.$$

Notons que $\mathbb{Q}_{n,q}$ est une mesure de probabilité sur $\mathfrak{S}_n$.

Théorème (M., 2011)

Soit $\mathbb{Q}_{n,q,t}$ le poids sur $\mathfrak{S}_n$ défini par

$$\mathbb{Q}_{n,q,t}[\sigma] = \sum_{i=0}^{n} t^i \,(1-t)^{n-i}\, \mathbb{Q}_{i,q}[\sigma_{[\![1,i]\!]}]\, \mathbb{Q}_{n-i,q}[(\sigma\omega_0)_{[\![1,n-i]\!]}].$$

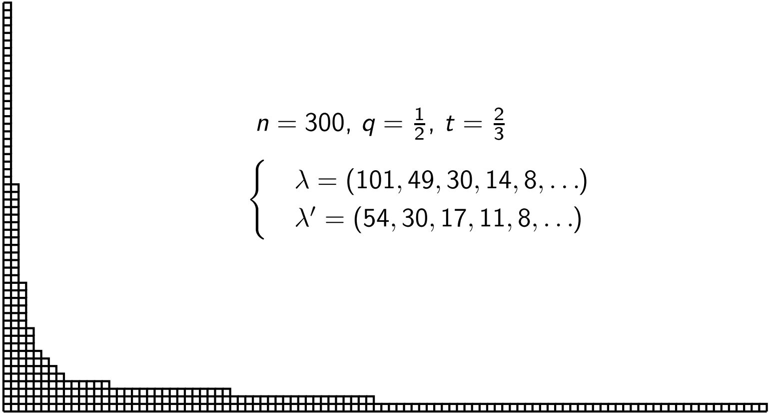
C'est une mesure de probabilité sur $\mathfrak{S}_n$, et l'image de $\mathbb{Q}_{n,q,t}$ par l'application RSK est la (q, t)-mesure de Plancherel.

1. (q,t)-mesures de Plancherel
   - Traces de Markov des algèbres d'Hecke
   - q-formule de Frobenius et poids des caractères
   - (q,t)-déformation de la mesure de Plancherel

2. Lien avec les permutations aléatoires
   - Descentes d'un tableau standard ou d'une permutation
   - Fonctions quasi-symétriques et développement des fonctions de Schur
   - Mesures sur $\mathfrak{S}_n$ correspondant aux (q,t)-mesures de Plancherel

3. Résultats asymptotiques
   - Loi des grands nombres
   - Théorème central limite

Grande partition aléatoire choisie suivant $\mathbb{P}_{n,q,t}$



$$n = 300,\ q = \frac{1}{2},\ t = \frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} \lambda = (101, 49, 30, 14, 8, \ldots) \\ \lambda' = (54, 30, 17, 11, 8, \ldots) \end{cases}$$

Observables de diagrammes

Pour comprendre le comportement des partitions aléatoires choisies suivant $\mathbb{P}_{n,q,t}$, on étudie les espérances de « fonctions polynomiales » des diagrammes de Young.

Observables de diagrammes

Pour comprendre le comportement des partitions aléatoires choisies suivant $\mathbb{P}_{n,q,t}$, on étudie les espérances de « fonctions polynomiales » des diagrammes de Young.

Si μ est une partition, on pose :

$$\Sigma_\mu(\lambda) = \begin{cases} n(n-1)\cdots(n-|\mu|+1)\,\chi^\lambda(\mu \sqcup 1^{n-|\mu|}) & \text{si } n = |\lambda| \geq |\mu|, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les fonctions Σ_μ engendrent linéairement une algèbre commutative $\mathscr{O}$ graduée par $\deg \Sigma_\mu = |\mu|$; c'est l'algèbre des **observables de diagrammes**.

Observables de diagrammes

Pour comprendre le comportement des partitions aléatoires choisies suivant $\mathbb{P}_{n,q,t}$, on étudie les espérances de « fonctions polynomiales » des diagrammes de Young.

Si μ est une partition, on pose :

$$\Sigma_\mu(\lambda) = \begin{cases} n(n-1)\cdots(n-|\mu|+1)\,\chi^\lambda(\mu \sqcup 1^{n-|\mu|}) & \text{si } n = |\lambda| \geq |\mu|, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les fonctions Σ_μ engendrent linéairement une algèbre commutative $\mathscr{O}$ graduée par $\deg \Sigma_\mu = |\mu|$; c'est l'algèbre des **observables de diagrammes**.

On calcule les espérances de ces variables aléatoires par la formule de Frobenius :

$$\mathbb{E}_{n,q,t}[\Sigma_\mu] = n^{\downarrow|\mu|} \sum_{\lambda \vdash n} s_\lambda(X_{q,z})\,\zeta^\lambda(\mu 1^{n-|\mu|}) = n^{\downarrow|\mu|}\, p_\mu(X_{q,z}).$$

Coordonnées et moments de Frobenius

Si λ est une partition, ses **coordonnées de Frobenius** sont les deux suites de demi-entiers

$$A = \left(\lambda_1 - \frac{1}{2}, \lambda_2 - \frac{3}{2}, \ldots, \lambda_d - \frac{2d+1}{2}\right);$$
$$B = \left(\lambda'_1 - \frac{1}{2}, \lambda'_2 - \frac{3}{2}, \ldots, \lambda'_d - \frac{2d+1}{2}\right).$$

Coordonnées et moments de Frobenius

Si λ est une partition, ses **coordonnées de Frobenius** sont les deux suites de demi-entiers

$$A = \left(\lambda_1 - \frac{1}{2}, \lambda_2 - \frac{3}{2}, \ldots, \lambda_d - \frac{2d+1}{2}\right);$$
$$B = \left(\lambda'_1 - \frac{1}{2}, \lambda'_2 - \frac{3}{2}, \ldots, \lambda'_d - \frac{2d+1}{2}\right).$$

Les **moments de Frobenius** sont les fonctions des diagrammes définies par :

$$p_k(\lambda) = p_k(A - (-B)) = \sum_{i=1}^{d} a_i^k + (-1)^{k-1} \sum_{i=1}^{d} b_i^k.$$

Les p_μ appartiennent à la même algèbre $\mathscr{O}$, avec $\deg p_\mu = |\mu|$ et $p_\mu = \Sigma_\mu + \cdots$. Par conséquent, $\mathbb{E}_{n,q,t}[p_\mu] \simeq \mathbb{E}_{n,q,t}[\Sigma_\mu] \simeq n^{|\mu|}\, p_\mu(X_{q,z})$ pour tout μ.

Loi des grands nombres

Comme les espérances des Σ_μ ou des p_μ ont la propriété de factorisation asymptotique, par l'inégalité de Bienaymé-Chebyshev :

Proposition

$$\frac{\Sigma_\mu(\lambda)}{n^{|\mu|}} \text{ ou } \frac{p_\mu(\lambda)}{n^{|\mu|}} \longrightarrow_{\mathbb{P}_{n,q,t}} p_\mu(X_{q,z}) = \prod_{i=1}^{\ell(\mu)} \frac{(1-q)^{\mu_i}\,(t^{\mu_i}-(t-1)^{\mu_i})}{1-q^{\mu_i}}.$$

Loi des grands nombres

Comme les espérances des Σ_μ ou des p_μ ont la propriété de factorisation asymptotique, par l'inégalité de Bienaymé-Chebyshev :

Proposition

$$\frac{\Sigma_\mu(\lambda)}{n^{|\mu|}} \text{ ou } \frac{p_\mu(\lambda)}{n^{|\mu|}} \longrightarrow_{\mathbb{P}_{n,q,t}} p_\mu(X_{q,z}) = \prod_{i=1}^{\ell(\mu)} \frac{(1-q)^{\mu_i}\,(t^{\mu_i}-(t-1)^{\mu_i})}{1-q^{\mu_i}}.$$

D'un point de vue géométrique, ce résultat se traduit par :

Théorème (M., 2011)

$$\forall i \geq 1,\ \ \frac{\lambda_i}{n} \longrightarrow_{\mathbb{P}_{n,q,t}} t(1-q)q^{i-1} \quad ; \quad \forall j \geq 1,\ \ \frac{\lambda'_j}{n} \longrightarrow_{\mathbb{P}_{n,q,t}} (1-t)(1-q)q^{j-1}.$$

Théorème central limite

En raffinant la technique des moments d'observables de diagrammes (Śniady), on peut de même établir un théorème central limite. Pour $i, j \geq 1$, posons

$$X_i = \sqrt{n}\left(\frac{\lambda_i}{n} - t(1-q)q^{i-1}\right) \quad ; \quad Y_j = \sqrt{n}\left(\frac{\lambda'_j}{n} - (1-t)(1-q)q^{j-1}\right).$$

Il s'agit des déviations renormalisées des lignes et des colonnes de λ.

Théorème central limite

En raffinant la technique des moments d'observables de diagrammes (Śniady), on peut de même établir un théorème central limite. Pour $i,j \geq 1$, posons

$$X_i = \sqrt{n}\left(\frac{\lambda_i}{n} - t(1-q)q^{i-1}\right) \quad ; \quad Y_j = \sqrt{n}\left(\frac{\lambda'_j}{n} - (1-t)(1-q)q^{j-1}\right).$$

Il s'agit des déviations renormalisées des lignes et des colonnes de λ.

Théorème (M., 2011)

Le vecteur $(X_1, X_2, \ldots, Y_1, Y_2, \ldots)$ *converge en lois fini-dimensionnelles vers un vecteur gaussien centré* $(X_{1,\infty}, X_{2,\infty}, \ldots, Y_{1,\infty}, Y_{2,\infty}, \ldots)$ *dont les covariances s'écrivent :*

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}(X_{i,\infty}, X_{j,\infty}) &= \delta_{ij} t(1-q)q^{i-1} - t^2(1-q)^2 q^{i+j-2};\\
\mathrm{cov}(Y_{i,\infty}, Y_{j,\infty}) &= \delta_{ij}(1-t)(1-q)q^{i-1} - (1-t)^2(1-q)^2 q^{i+j-2};\\
\mathrm{cov}(X_{i,\infty}, Y_{j,\infty}) &= -t(1-t)(1-q)^2 q^{i+j-2}.
\end{aligned}$$

Ces résultats peuvent être généralisés dans deux directions distinctes :

- On peut en réalité énoncer une loi des grands nombres et un théorème central limite pour n'importe quel système de mesures de probabilité sur $\mathfrak{Y} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{Y}_n$ provenant d'un caractère du groupe symétrique infini, et correspondant à deux alphabets (réels positifs) A et B tels que $p_1(A+B) = 1$. Ici, on avait

$$A = \frac{[(1-q)t]}{1-[q]} \qquad ; \qquad B = \frac{[(1-q)(1-t)]}{1-[q]}.$$

Ces résultats peuvent être généralisés dans deux directions distinctes :

- On peut en réalité énoncer une loi des grands nombres et un théorème central limite pour n'importe quel système de mesures de probabilité sur $\mathfrak{Y} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{Y}_n$ provenant d'un caractère du groupe symétrique infini, et correspondant à deux alphabets (réels positifs) A et B tels que $p_1(A+B)=1$. Ici, on avait

$$A = \frac{[(1-q)t]}{1-[q]} \qquad ; \qquad B = \frac{[(1-q)(1-t)]}{1-[q]}.$$

- Il existe une notion de trace de Markov pour les algèbres d'Hecke cyclotomiques $\mathscr{H}(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \wr \mathfrak{S}_n)$ (**algèbres d'Ariki-Koike**), et une formule pour les poids mettant en jeu des fonctions de Schur. L'interprétation combinatoire des mesures correspondantes, et l'asymptotique des multipartitions sous ces mesures est encore inconnue.