# Problème de générations

Arnaud Mary

LIMOS - Université Blaise Pascal

13 mars 2012

# Sommaire

### Problème d'énumération

**Entrée :** Une structure discrète $\mathcal{S}$
**Sortie :** Toutes les configurations de $\mathcal{S}$ qui vérifient une propriété $P$.

- Appelons $\mathcal{N}$ l'ensemble des configurations de $\mathcal{S}$ vérifiant $P$.
- $|\mathcal{N}|$ peut être exponentiel par rapport à $|\mathcal{S}|$.
- Complexité polynomiale : $O((|\mathcal{S}| + |\mathcal{N}|)^k)$.

Soit $G = (X, E)$ un graphe. On note $\mathcal{C}(G)$ l'ensemble des cliques maximales de $G$.

**Problème de génération : Cliques Maximales**

**Instance :** $G = (X, E)$ un graphe.
**Question :** Générer l'ensemble $\mathcal{C}(G)$.

**Problème de décision : Cliques Maximales**

**Instance :** $G = (X, E)$ un graphe et $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}(G)$
**Question :** Est-ce que $\mathcal{H} = \mathcal{C}(G)$ ?

Soit $G = (X, E)$ un graphe. On note $\mathcal{C}(G)$ l'ensemble des cliques maximales de $G$.

**Problème de génération : Cliques Maximales**

**Instance :** $G = (X, E)$ un graphe.
**Question :** Générer l'ensemble $\mathcal{C}(G)$.

**Problème de décision : Cliques Maximales avec contre exemple**

**Instance :** $G = (X, E)$ un graphe et $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}(G)$
**Question :** Est-ce que $\mathcal{H} = \mathcal{C}(G)$ ? Sinon trouver $C \in \mathcal{C}(G) \setminus \mathcal{H}$.

- Paramètres :
  - Entrée : $n$
  - Sortie : $m$
- Complexité temporelle :
  - Output polynomial : $O((n+m)^k)$
  - Polynomiale par objet : $O(n^k.m)$
  - Délai polynomial : Le délai entre "l'affichage" d'un objet et le prochain est en $O(n^k)$.
- Complexité Spatiale :
  - Polynomiale : $O(n^k)$

# Poset

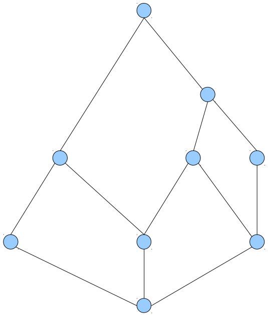
**Definition**

Un ordre partiel (poset) $P = (E, \preceq)$ est un ensemble $E$ muni d'une relation d'ordre $\preceq$

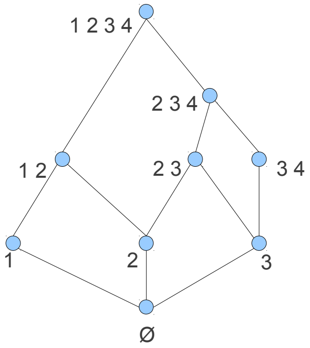
2 éléments $x$ et $y$ de $E$ peuvent être incomparables, noté $x||y$.

**Definition**

$A \subseteq E$ est une antichaîne, si pour tout $x, y \in A$, $x||y$.



$P$




Plongement dans $2^4$

**Definition (Idéal d'un élément)**

On appelle idéal d'un élément $x \in E$, l'ensemble noté $x\downarrow$ tel que :
$x\downarrow := \{y \in E \mid y \preceq x\}$

**Definition (Idéal d'un ensemble)**

On appelle idéal d'un ensemble $X \subseteq E$, l'ensemble $X\downarrow := \bigcup_{x \in X} x\downarrow$

**Definition (Filtre d'un élément)**

On appelle filtre d'un élément $x \in E$, l'ensemble noté $x \uparrow$ tel que :
$x \uparrow := \{y \in E \mid x \preceq y\}$

**Definition (Filtre d'un ensemble)**

On appelle idéal d'un ensemble $X \subseteq E$, l'ensemble $X \uparrow := \bigcup_{x \in X} x \uparrow$

# Dualisation

## Definition (Bordure négative)

Soit $A \subseteq E$, la bordure négative de $A$, $bd^{-}(A)$ est l'ensemble des éléments minimaux qui n'appartiennent pas à $A\downarrow$. i.e. :
$bd^{-}(A) := Min(E \setminus A\downarrow)$

# Dualisation

## Definition (Bordure négative)

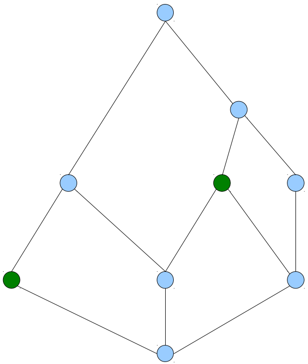
Soit $A \subseteq E$, la bordure négative de $A$, $bd^-(A)$ est l'ensemble des éléments minimaux qui n'appartiennent pas à $A\downarrow$. i.e. : $bd^-(A) := Min(E \setminus A\downarrow)$

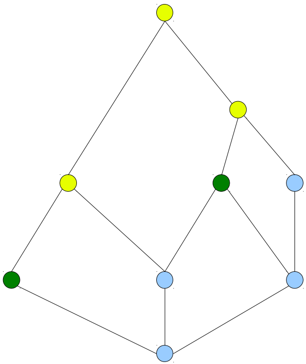
## Definition (Bordure positive)

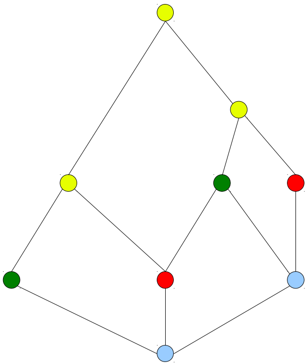
Soit $A \subseteq E$, la bordure positive de $A$, $bd^+(A)$ est l'ensemble des éléments maximaux qui n'appartiennent pas à $A\uparrow$. i.e. : $bd^+(A) := Max(E \setminus A\uparrow)$

## Propriété

- $A\downarrow \cup bd^-(A)\uparrow = E$
- $A\uparrow \cup bd^+(A)\downarrow = E$

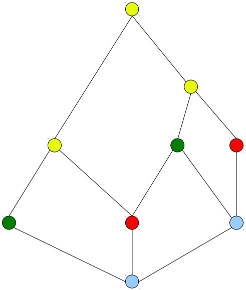






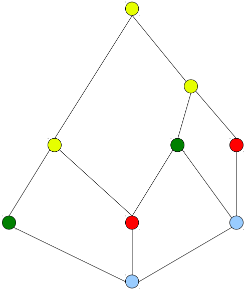
## Proposition

- $bd^{-}(X) = bd^{-}(Max(X))$
- $bd^{+}(X) = bd^{+}(Min(X))$



## Propriété (Dualité)

*Si $X$ est une antichaîne, alors :*
$bd^+(bd^-(X)) = bd^-(bd^+(X)) = X$



## Dualisation (Génération)

**Instance :** Une antichaîne $A$ de $(E, \preceq)$.
**Question :** Générer $bd^+(A)$.

## Dualisation (Génération)

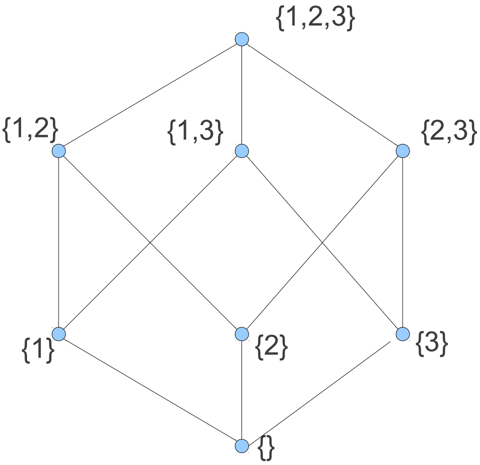
**Instance :** Une antichaîne $A$ de $(E, \preceq)$.
**Question :** Générer $bd^+(A)$.

Dans le cas général le problème de dualisation est $NP$-complet. Cas particuliers :

- $(E, \preceq)$ forme un treillis : $NP$-complet.
- $(E, \preceq)$ forme un treillis distributif : Ouvert.
- $(E, \preceq)$ est un produit de chaînes : Quasi-Polynomial.
- $(E, \preceq) = 2^V$ (treillis booléen) : Quasi-Polynomial.
- $A$ est l'ensemble des bases d'un matroide : Polynomial.

# Sommaire

# Treillis booléen sur 3 éléments



## Contexte

Un contexte $\mathcal{C}$ est un triplet $(G, M, I)$ :

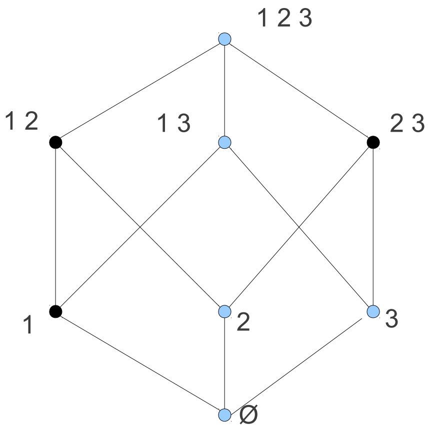
- où $G$ est un ensemble d'objets
- où $M$ est un ensemble d'attributs
- et $I \subseteq G \times M$ correspond à la relation binaire " l'objet $g$ possède l'attribut $m$".

## Remarque

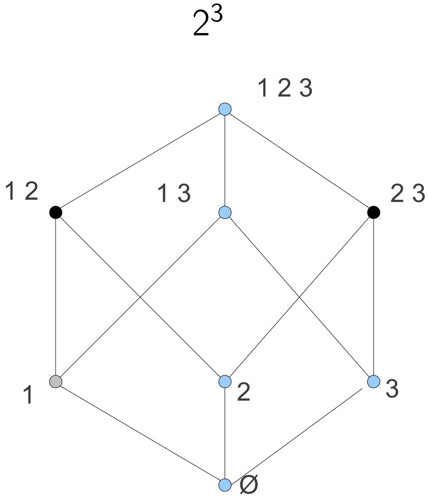
Un objet peut être vu comme un ensemble d'attributs, un contexte formel n'est alors qu'une famille d'ensemble.

| | $m_1$ | $m_2$ | $m_3$ |
|---|---|---|---|
| $g_1$ | | 1 | 1 |
| $g_2$ | 1 | 1 | |
| $g_3$ | 1 | | |

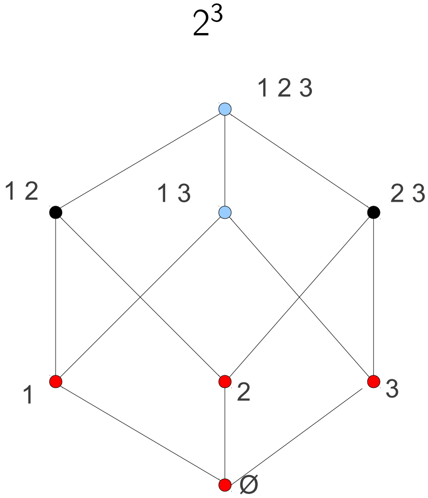
$2^3$



|  | $m_1$ | $m_2$ | $m_3$ |
|---|---|---|---|
| $g_1$ |  | 1 | 1 |
| $g_2$ | 1 | 1 |  |
| $g_3$ | 1 |  |  |

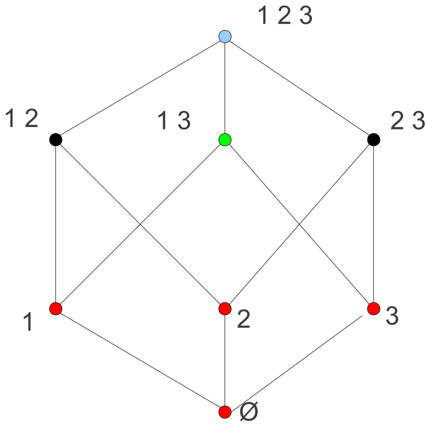


|  | $m_1$ | $m_2$ | $m_3$ |
|---|---|---|---|
| $g_1$ |  | 1 | 1 |
| $g_2$ | 1 | 1 |  |
| $g_3$ | 1 |  |  |



| | $m_1$ | $m_2$ | $m_3$ |
|---|---|---|---|
| $g_1$ | | 1 | 1 |
| $g_2$ | 1 | 1 | |
| $g_3$ | 1 | | |

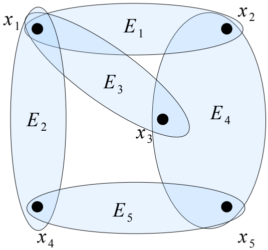
$2^3$



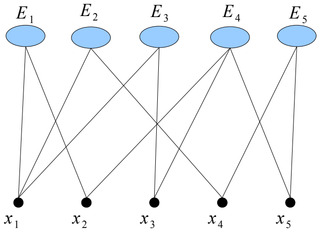
**Definition (Hypergraphe)**

Un *hypergraphe* $\mathcal{H}$ est un couple $(V, \mathcal{E})$ où $V$ est appelé ensemble de sommets et $\mathcal{E} \subseteq 2^V$ est appelé ensemble des hyperarêtes de $\mathcal{H}$.

$\mathcal{H}$ est dit simple, si aucune hyperarête n'est comparable à une autre. ie. $\forall e_1, e_2 \in \mathcal{E}$, $e_1 \not\subset e_2$ et $e_1 \not\subset e_2$




Un hypergraphe $\mathcal{H}$.




$\mathcal{H}$ représenté sous la forme de son biparti d'incidence.

**Definition (indépendants)**

$I \subseteq 2^V$ est appelé *indépendant* de $\mathcal{H}$, si $I$ ne contient aucune hyperarête de $\mathcal{H}$. $I$ est dit maximal, si $I$ n'est contenu dans aucun autre indépendant

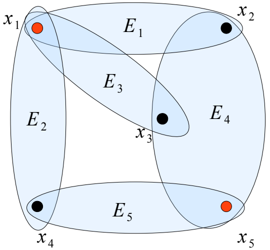
$bd^+(\mathcal{H})$ est alors l'ensemble des indépendants maximmaux de $\mathcal{H}$.

Un problème équivalent et largement étudié, est la génération des transversaux minimaux d'un hypergraphe.

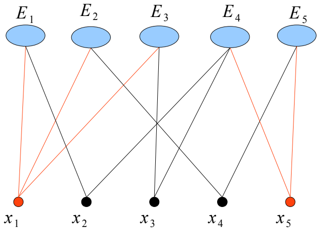
**Definition (Transversal)**

$T \subseteq 2^V$ est un transversal si $\forall E \in \mathcal{E}$, $\exists x \in T$, tel que $x \in E$. $T$ est minimal s'il ne contient aucun autre transversal.

Les transversaux minimaux sont les complémentaires des indépendants maximaux de l'hypergraphe.




Un transversal de $\mathcal{H}$.




Un transversal dans le biparti d'incidence.

On note $tr(\mathcal{H})$ l'ensemble des transversaux minimaux de $\mathcal{H}$.
$tr(\mathcal{H})$ est un hypergraphe simple.

**Propriété**

*Si $\mathcal{H}$ est un hypergraphe simple, alors $tr(tr(\mathcal{H})) = \mathcal{H}$.*

On note $tr(\mathcal{H})$ l'ensemble des transversaux minimaux de $\mathcal{H}$.
$tr(\mathcal{H})$ est un hypergraphe simple.

**Propriété**

*Si $\mathcal{H}$ est un hypergraphe simple, alors $tr(tr(\mathcal{H})) = \mathcal{H}$.*

**Propriété**

- $bd^+(A) = \overline{tr(A)}$
- $bd^-(A) = tr(\overline{A})$

## Problème de l'hypergraphe transversal

**Input :** Un hypergraphes $\mathcal{H}$.

**Output :** $tr(\mathcal{H})$.

### Problème de l'hypergraphe transversal

**Input :** Un hypergraphes $\mathcal{H}$.
**Output :**$tr(\mathcal{H})$.

### Théorème (Fredman, Khachiyan)

*Le problème de génération des transversaux minimaux d'un hypergraphe est quasi-polynomial ie.* $O(N^{log(N)})$ *où* $N = |\mathcal{H}| + |tr(\mathcal{H})|$

Cas polynomiaux :

- Taille des hyperarêtes bornée.
- Hypergraphes $\beta$-acycliques.
- Degrés bornés
- Taille des intersections bornée.
- tree-width bornée.
- $k$-dégénéré
- $k$-conforme
- ...

## Remarque

- Les arbres couvrants sont les transversaux minimaux des coupes.
- Les vertex covers minimaux sont les transversaux minimaux des arêtes (vues comme couples de sommets).
- Les edges covers minimaux sont les transversaux minimaux des ensembles d'arêtes incidentes à chaque sommet.
- Les dominants minimaux sont les transversaux minimaux des voisinages fermés.
- Les dominants totaux minimaux sont les transversaux minimaux des voisinages ouverts.

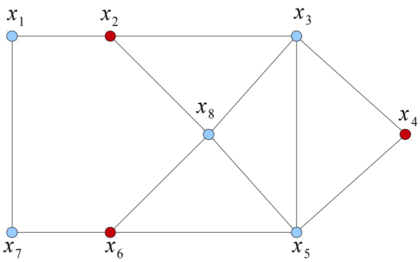
# Sommaire

**Definition (Dominant)**

Soit $G = (V, E)$ un graphe, un dominant est un ensemble $D \subseteq V$ tel que tout sommet de $V \setminus D$ possède un voisin dans $D$. Un dominant est dit minimal, s'il ne contient pas d'autre dominant.

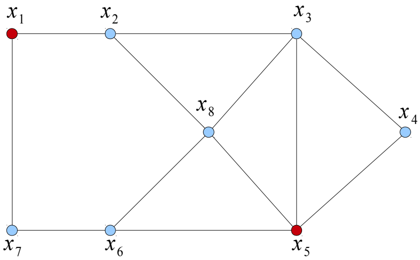
## Definition (Dominant)

Soit $G = (V, E)$ un graphe, un dominant est un ensemble $D \subseteq V$ tel que tout sommet de $V \setminus D$ possède un voisin dans $D$. Un dominant est dit minimal, s'il ne contient pas d'autre dominant.



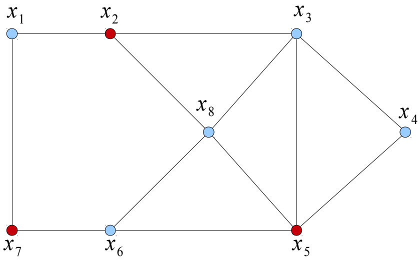
## Definition (Dominant)

Soit $G = (V, E)$ un graphe, un dominant est un ensemble $D \subseteq V$ tel que tout sommet de $V \setminus D$ possède un voisin dans $D$. Un dominant est dit minimal, s'il ne contient pas d'autre dominant.



## Definition (Dominant)

Soit $G = (V, E)$ un graphe, un dominant est un ensemble $D \subseteq V$ tel que tout sommet de $V \setminus D$ possède un voisin dans $D$. Un dominant est dit minimal, s'il ne contient pas d'autre dominant.



- Le voisinage fermé $N[x]$ d'un sommet $x$, est l'ensemble formé par $x$ et l'ensemble de ses voisins.
- On note $\mathcal{N}(G)$ l'hypergraphe formé par les voisinages fermés de $G$, i.e. $\mathcal{N}(G) = \{N[x_1], N[x_2]..., N[x_n]\}$
- On note $\mathcal{D}(G)$ l'ensemble des dominants minimaux de $G$.

**Folklore**

$\mathcal{D}(G) = tr(\mathcal{N}(G))$.

### Definition

Un hypergraphe $\mathcal{H}$ est dit réalisable s'il est l'hypergraphe des voisinages d'un graphe.

Tout hypergraphe n'est pas réalisable.

### Question

Existe-t-il un algorithme output polynomial pour générer les dominants minimaux d'un graphe ?

**Definition**

Un hypergraphe $\mathcal{H}$ est dit réalisable s'il est l'hypergraphe des voisinages d'un graphe.

Tout hypergraphe n'est pas réalisable.

**Question**

Existe-t-il un algorithme output polynomial pour générer les dominants minimaux d'un graphe ?

**Theorem (Kanté, Limouzy, M., Nourine)**

*Le problème de génération des dominants minimaux d'un graphe et le problème de l'hypergraphe transversal sont équivalents.*

# Problèmes connexes

## Autre résultats

- Dominants totaux minimaux : équivalent au problème de l'hypergraphe transversal.
- Dominants connexe minimaux : au moins aussi dur que le problème de l'hypergraphe transversal.
- Dominants contenant un ensemble : coNP-complet.

# Complétion

Soit $G = (V, E)$ un graphe.

**Definition**

Un sommet $x \in V$ est appelé redondant si il existe $y \neq x$ tel que $N[y] \subseteq N[x]$. Un somment non redondant est appelé minimal. L'ensemble des sommets minimaux (resp. redondants) est noté $M(G)$ (resp. $RN(G)$).

# Complétion

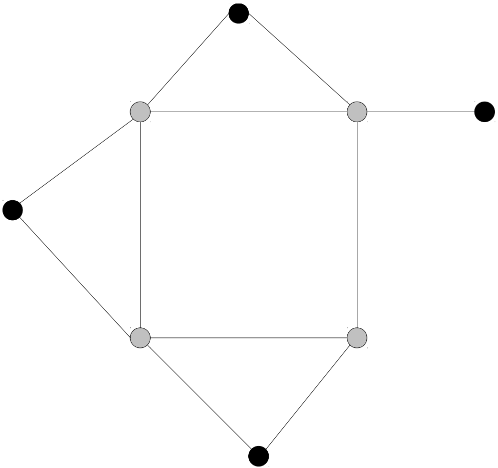
Soit $G = (V, E)$ un graphe.

**Definition**

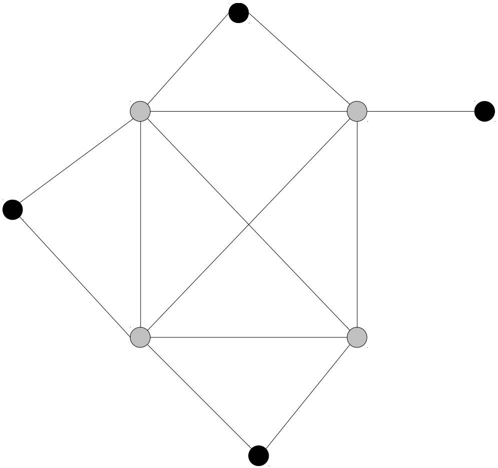
Un sommet $x \in V$ est appelé redondant si il existe $y \neq x$ tel que $N[y] \subseteq N[x]$. Un somment non redondant est appelé minimal. L'ensemble des sommets minimaux (resp. redondants) est noté $M(G)$ (resp. $RN(G)$).

**Definition**

Le graphe complété de $G$ est le graphe $G_{co}$ tel que $V(G_{co}) = V(G)$ et tel que $E(G_{co}) = E(G) \cup \{xy \mid x, y \in RN(G), x \neq y\}$



$G$



$G_{CO}$

# Complétion

**Propriété**

*$D$ est un dominant minimal de $G$ ssi $D$ est un dominant minimal de $G_{co}$. ie.* $\mathcal{D}(G) = \mathcal{D}(G_{co})$

- Si $G$ est chordal $P_6$-free alors $G_{co}$ est un split graph.

# Complétion

**Propriété**

*$D$ est un dominant minimal de $G$ ssi $D$ est un dominant minimal de $G_{co}$. ie.* $\mathcal{D}(G) = \mathcal{D}(G_{co})$

- Si $G$ est chordal $P_6$-free alors $G_{co}$ est un split graph.
- Si $G_{co}$ est chordal, alors $G_{co}$ est un split graph.

# Réduction

## Observation

Soit $x$ et $y$ 2 jumeaux, et soit $D$ dominant minimal contenant $x$, alors $(D \setminus \{x\}) \cup \{y\}$.

# Réduction

## Observation

Soit $x$ et $y$ 2 jumeaux, et soit $D$ dominant minimal contenant $x$, alors $(D \setminus \{x\}) \cup \{y\}$.

## Definition

Deux sommets $x$ et $y$ sont appelés $d$-équivalents, if $N[x] \cap M(G) = N[y] \cap M(G)$

# Réduction

## Observation

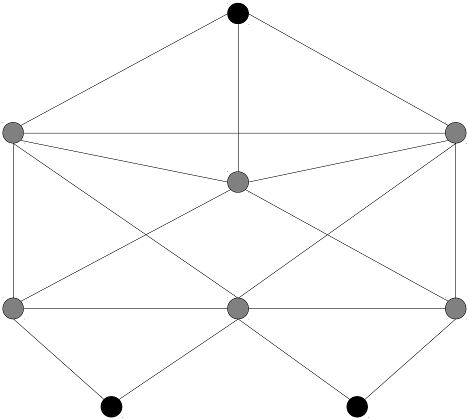
Soit $x$ et $y$ 2 jumeaux, et soit $D$ dominant minimal contenant $x$, alors $(D \setminus \{x\}) \cup \{y\}$.

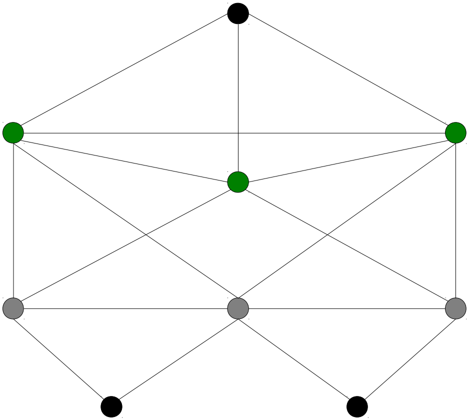
## Definition

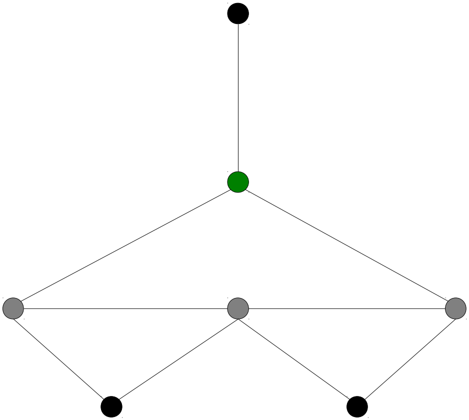
Deux sommets $x$ et $y$ sont appelés *d*-équivalents, if $N[x] \cap M(G) = N[y] \cap M(G)$

## Lemme

*Soit $x$ et $y$ deux sommets d-équivalents, et soit $D$ un dominant contenant $x$, alors $(D \setminus \{x\}) \cup \{y\}$ est un dominant minimal.*







# Sommaire

- Peut on générer une "grande" partie des dominants (resp. transversaux) en temps polynomial ?
- Génération des dominants dans certaines classes de graphes ?
- Est ce que la génération des dominants connexes est *NP*-complet ?
- Est ce que la génération des transversaux est polynomiale ?

# Merci