# Problèmes à $N$ corps, Intégrabilité et Fonctions Symétriques

## Séminaire CIP

Matthieu Deneufchâtel
Stage dirigé par J.-Y. Thibon

Université Paris 7 - Institut d'Électronique et d'Informatique Gaspard Monge

15 Septembre 2009

# Plan

## Hamiltonien de Calogero [a] :

[a] F. Calogero, *Jour. of Math. Phys.*, **10**, 2197 (1969)

$$H_C = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2} + \sum_{i<j} \frac{\epsilon(\epsilon-1)}{(x_i-x_j)^2} \left( +\omega \sum_{i,j} (x_i - x_j)^2 \right) \tag{1}$$

## Hamiltonien de Calogero [a] :

[a] F. Calogero, *Jour. of Math. Phys.*, **10**, 2197 (1969)

$$H_C = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2} + \sum_{i<j} \frac{\epsilon(\epsilon-1)}{(x_i - x_j)^2} \left( + \omega \sum_{i,j} (x_i - x_j)^2 \right) \quad (1)$$

## Définition

$$D = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \epsilon \sum_{i \neq j} \frac{1}{x_i - x_j} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \quad (2)$$

## Hamiltonien de Calogero [a] :

[a] F. Calogero, *Jour. of Math. Phys.*, **10**, 2197 (1969)

$$H_C = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2} + \sum_{i<j} \frac{\epsilon(\epsilon-1)}{(x_i-x_j)^2} \left( +\omega \sum_{i,j} (x_i - x_j)^2 \right) \tag{1}$$

## Définition

$$D = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \epsilon \sum_{i\neq j} \frac{1}{x_i - x_j} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \tag{2}$$

## Définition

$f(x_1, \ldots, x_N)$ est symétrique si

$$f(x_1, \ldots, x_N) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(N)}), \; \forall \sigma \in S_N \tag{3}$$

$D$ apparaît dans différents problèmes :

- Dynamique de matrices aléatoires dépendant d'un paramètre
- Méthode de projection de Perelomov-Olshanski
- Généralisation de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur un espace de matrice
- Transformation canonique du Hamiltonien de Calogero quantique

$D$ apparaît dans différents problèmes :

- Dynamique de matrices aléatoires dépendant d'un paramètre
- Méthode de projection de Perelomov-Olshanski
- Généralisation de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur un espace de matrice
- Transformation canonique du Hamiltonien de Calogero quantique

## Motivations à long terme

- Explication *naturelle* des apparitions de $D$ dans ces contextes différents
- Étude des fonctions symétriques utiles dans le problème de Calogero
- En particulier, faire le lien avec les polynômes de Jack

# Cas classique : Intégrabilité au sens de Liouville

## Définition

Un système à $N$ degrés de liberté est *intégrable* s'il existe $F_1, \ldots, F_N$, $N$ fonctions des $x_i$ et des $p_i$, indépendantes, vérifiant

$$\{F_i, F_j\} = 0, \forall i, j \in 1, ..., N \tag{4}$$

## Intégrales *canoniques* pour le système de Calogero [a] :

[a] S. Wojciechowski, *Lett. N. Cim.*, **18**, 103 (1977)

$$I_N = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i\neq j} V(x_i - x_j)\frac{\partial}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial p_j}\right)\prod_{k=1}^{N} p_k \tag{5}$$

$$I_{n-1} = \{I_n, \sum_{k=1}^{N} x_k\} \tag{6}$$

# Cas classique : Algèbre $sl(2,\mathbb{R})$

## Définition

$$T_+ = \left( \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2} + \frac{\epsilon(\epsilon-1)}{2} \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N} \frac{1}{(x_i - x_j)^2} \right) \tag{7a}$$

$$T_- = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^2}{2} \tag{7b}$$

$$T_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} x_i p_i \tag{7c}$$

Ces opérateurs vérifient les relations qui définissent l'algèbre $sl(2,\mathbb{R})$ :

$$\{T_0, T_\pm\} = \pm T_\pm \tag{8a}$$

$$\{T_+, T_-\} = -2T_0 \tag{8b}$$

# Cas classique : Transformation canonique 1

$$A \to \exp\left[\mathrm{ad}\left(i\lambda T_1\right)\right] \cdot A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\lambda)^n}{n!} \underbrace{\{T_1, \ldots \{T_1, A\}\}}_{n\,\text{times}} \tag{9}$$

$T_1 = \frac{i}{2}\left(T_+ + T_-\right)$, $\mathrm{ad}(x) \cdot y = \{x, y\}$.

# Cas classique : Transformation canonique 1

$$A \rightarrow \exp\left[\mathrm{ad}\left(i\lambda T_1\right)\right] \cdot A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\lambda)^n}{n!} \underbrace{\{T_1, \ldots \{T_1, A\}\}}_{n\,\text{times}} \tag{9}$$

$T_1 = \frac{i}{2}\left(T_+ + T_-\right)$, $\mathrm{ad}(x) \cdot y = \{x, y\}$.

## Définition

Avec $\tilde{T}_{\pm,1} = \tilde{T}_{\pm,1}(\epsilon = 0)$, on définit une nouvelle transformation canonique :

$$T : A \rightarrow \exp\left[\mathrm{ad}\left(-i\pi \tilde{T}_1\right)\right] \cdot \left[\exp\left[\mathrm{ad}\left(\pi T_1\right)\right] \cdot A\right] \tag{10}$$

# Cas classique : Transformation canonique 1

$$A \to \exp\left[\mathrm{ad}\left(i\lambda T_1\right)\right] \cdot A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\lambda)^n}{n!} \underbrace{\{T_1, \ldots \{T_1, A\}\}}_{n\,\text{times}} \tag{9}$$

$T_1 = \frac{i}{2}\left(T_+ + T_-\right)$, $\mathrm{ad}(x) \cdot y = \{x, y\}$.

**Définition**

Avec $\tilde{T}_{\pm,1} = \tilde{T}_{\pm,1}(\epsilon = 0)$, on définit une nouvelle transformation canonique :

$$T : A \to \exp\left[\mathrm{ad}\left(-i\pi \tilde{T}_1\right)\right] \cdot \left[\exp\left[\mathrm{ad}\left(\pi T_1\right)\right] \cdot A\right] \tag{10}$$

On montre que

$$T \cdot T_+ = \exp\left[\mathrm{ad}\left(-i\pi \tilde{T}_1\right)\right] \cdot \left[\exp\left[\mathrm{ad}\left(\pi T_1\right)\right] \cdot T_+\right] = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2} \tag{11}$$

# Cas quantique : Élimination du fondamental

$$\psi_g(\mathbf{x}) = \prod_{1\le j<k\le N} |x_j - x_k|^{\epsilon} \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{N} x_l^2\right] \tag{12}$$

est le fondamental, d'énergie $E_g = \frac{1}{2}N((N-1)\epsilon + 1)$.

# Cas quantique : Élimination du fondamental

$$\psi_g(\mathbf{x}) = \prod_{1\leq j<k\leq N} |x_j - x_k|^{\epsilon} \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{N} x_l^2\right] \tag{12}$$

est le fondamental, d'énergie $E_g = \frac{1}{2}N((N-1)\epsilon + 1)$. On transforme $H_C$ en $H$ comme suit :

$$H = \psi_g^{-1}\left[H_C - E_g\right]\psi_g \tag{13}$$

Le calcul donne :

$$\begin{aligned} H &= -\frac{1}{2}D + \sum_{l=1}^{N} x_l \frac{\partial}{\partial x_l} \\ &= -\frac{1}{2}D + \mathcal{O}_E \end{aligned} \tag{14}$$

# Transformation canonique 2

## Cas quantique : Transformation canonique 2 (cas quantique)

$$T = \exp\left[-\frac{1}{4}D\right]\exp\left[\frac{1}{4}\Delta\right]\exp\left[\frac{1}{2}\mathbf{x}^2\right] \tag{15}$$

avec $\Delta = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$.

# Transformation canonique 2

## Cas quantique : Transformation canonique 2 (cas quantique)

$$T = \exp\left[-\frac{1}{4}D\right]\exp\left[\frac{1}{4}\Delta\right]\exp\left[\frac{1}{2}\mathbf{x}^2\right] \tag{15}$$

avec $\Delta = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$.

La conjugaison de $H$ par $T$ donne

$$T^{-1}HT = \sum_{j=1}^{N} n_j = \sum_{j=1}^{N} a_j^\dagger a_j \tag{16}$$

où $n_j$ est un opérateur nombre pour un oscillateur harmonique 1D, d'où l'intégrabilité du système.

# Fonctions monomiales symétriques

## Définition

$$m_\lambda(\mathbf{x}) = \sum_{\sigma \in S_N} x_1^{\lambda_{\sigma(1)}} \dots x_N^{\lambda_{\sigma(N)}} \tag{17}$$

$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{N}^N$, $S_N =$ groupe des permutations de $\{1, \dots, N\}$, chaque permutation apparaissant une seule fois.

# Fonctions monomiales symétriques

## Définition

$$m_\lambda(\mathbf{x}) = \sum_{\sigma \in S_N} x_1^{\lambda_{\sigma(1)}} \dots x_N^{\lambda_{\sigma(N)}} \tag{17}$$

$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{N}^N$, $S_N$ = groupe des permutations de $\{1, \dots, N\}$, chaque permutation apparaissant une seule fois.

- Même symétrisation que pour les fonctions propres d'un système de bosons.
- Symétrisation imposée par les divergences éventuellement créées par le terme en $\exp\left[\sum_{i \neq j} \frac{1}{(x_i - x_j)^2}\right]$ ;
- Fonctions propres *naturellement* symétriques.

## $m_\lambda$ et opérateurs de création et d'annihilation

Notons :

$$\langle \mathbf{x}|0\rangle = \exp(-\frac{1}{2}\omega \mathbf{x}^2)$$

$$b_j^+ = Ta_j^\dagger T^{-1} = \exp(-\frac{1}{4}D)\, x_j \, \exp(\frac{1}{4}D)$$

(opérateurs qui interviennent dans la première transformation canonique).

**Fonctions propres**

$$|\lambda\rangle = m_\lambda\left(\hat{\mathbf{b}}^+\right)|0\rangle \tag{18}$$

indexées par $\lambda$ partition de $\sum_i \lambda_i$ de taille $N$.

## Remarque

Les fonctions "intéressantes" dans ce problème **sont** symétriques.
Pour faciliter cette étude, il est utile d'exprimer les différents opérateurs en termes des ESF ⇒ travail avec ACE.

$$H_C = \sum_{l \leq m} A_{lm} \frac{\partial^2}{\partial e_l \partial e_m} - \epsilon \sum_{k=2}^{N} \frac{(N-k+2)(N-k+1)}{2} e_{k-2} \frac{\partial}{\partial e_k} + \sum_{k=1}^{N} k e_k \frac{\partial}{\partial e_k} \tag{19}$$

avec

$$A_{lm} = (2 - \delta_{l,m}) \Big[ (N-m+1) e_{l-1} e_{m-1} - \sum_{k=1}^{\min(l-1, N-m+1)} (m - l + 2k) e_{l-1-k} e_{m-1-k} \Big]$$

Avec des coordonnées invariantes par translation

$$y_i = x_i - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j, \quad \tau_i = e_i(y(x)) \tag{20}$$

On a

$$H_C = -\frac{1}{2}\sum_{j,k=2}^{N} B_{jk}\frac{\partial^2}{\partial\tau_j\partial\tau_k} + \sum_{i=2}^{N} i\tau_i\frac{\partial}{\partial\tau_i}$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{N}+\epsilon\right)\sum_{i=2}^{N}(N-i+2)(N-i+1)\tau_{i-2}\frac{\partial}{\partial\tau_i}$$

avec

$$B_{jk} = \frac{(N-j+1)(k-1)}{N}\tau_{j-1}\tau_{k-1} + \sum_{l\geq\max(1,k-j)}(k-j-2l)\tau_{j+l-1}\tau_{k-l-1}$$

# Conclusion

- Revue de quelques propriétés et techniques utiles pour ce problème
- Liens établis entre le problème physique et les fonctions symétriques
- Survol de liens entre des problèmes de physique différents reliés par les fonctions ou opérateurs qu'ils font intervenir
- Initiation à certains algorithmes déjà existant pour les fonctions symétriques (ACE $\Rightarrow$ Sage ?)

# Conclusion

- Revue de quelques propriétés et techniques utiles pour ce problème
- Liens établis entre le problème physique et les fonctions symétriques
- Survol de liens entre des problèmes de physique différents reliés par les fonctions ou opérateurs qu'ils font intervenir
- Initiation à certains algorithmes déjà existant pour les fonctions symétriques (ACE $\Rightarrow$ Sage ?)

## Perspectives

- Lien avec les polynômes de Jack (Analyse du noyau de $D$ ?)
- Polynômes de Jack et effet Hall quantique (avec Jean-Gabriel ?)