

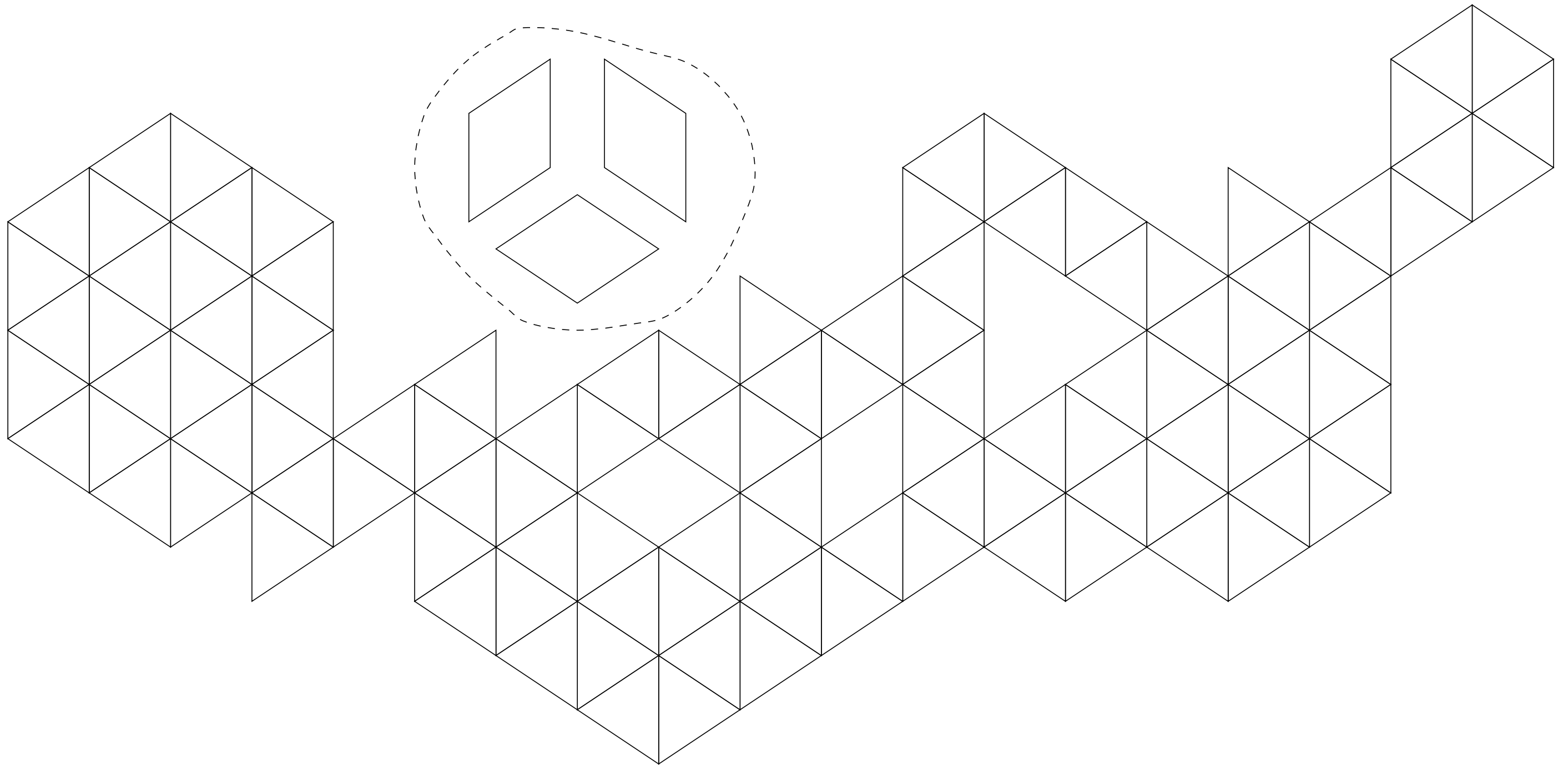
UNIVERSITE MONTPELLIER II
SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC



Pavages d'une polycellule

Thomas FERNIQUE

Soutenance de DEA



Un domaine troué à cases triangulaires à paver par des losanges.
Cet exemple servira de fil directeur durant cette soutenance (mais ne constitue qu'un cas particulier!).

1. Notions de base
2. Construction d'un pavage
3. Nodules et décomposition de polycellules
4. Flips et produit de treillis
5. Énumération des pavages

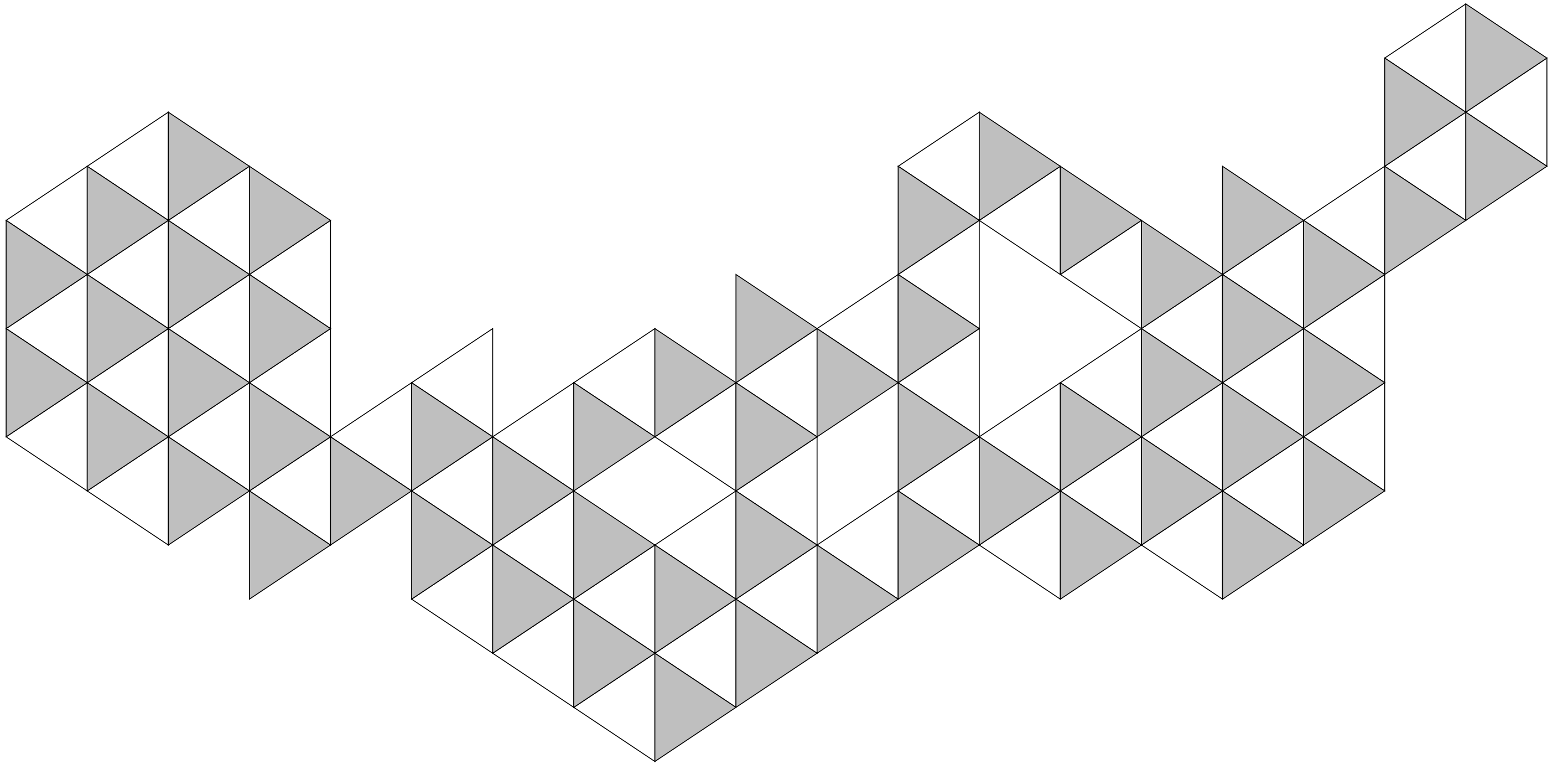
Notions de base

Définition 1 (Polycellule)

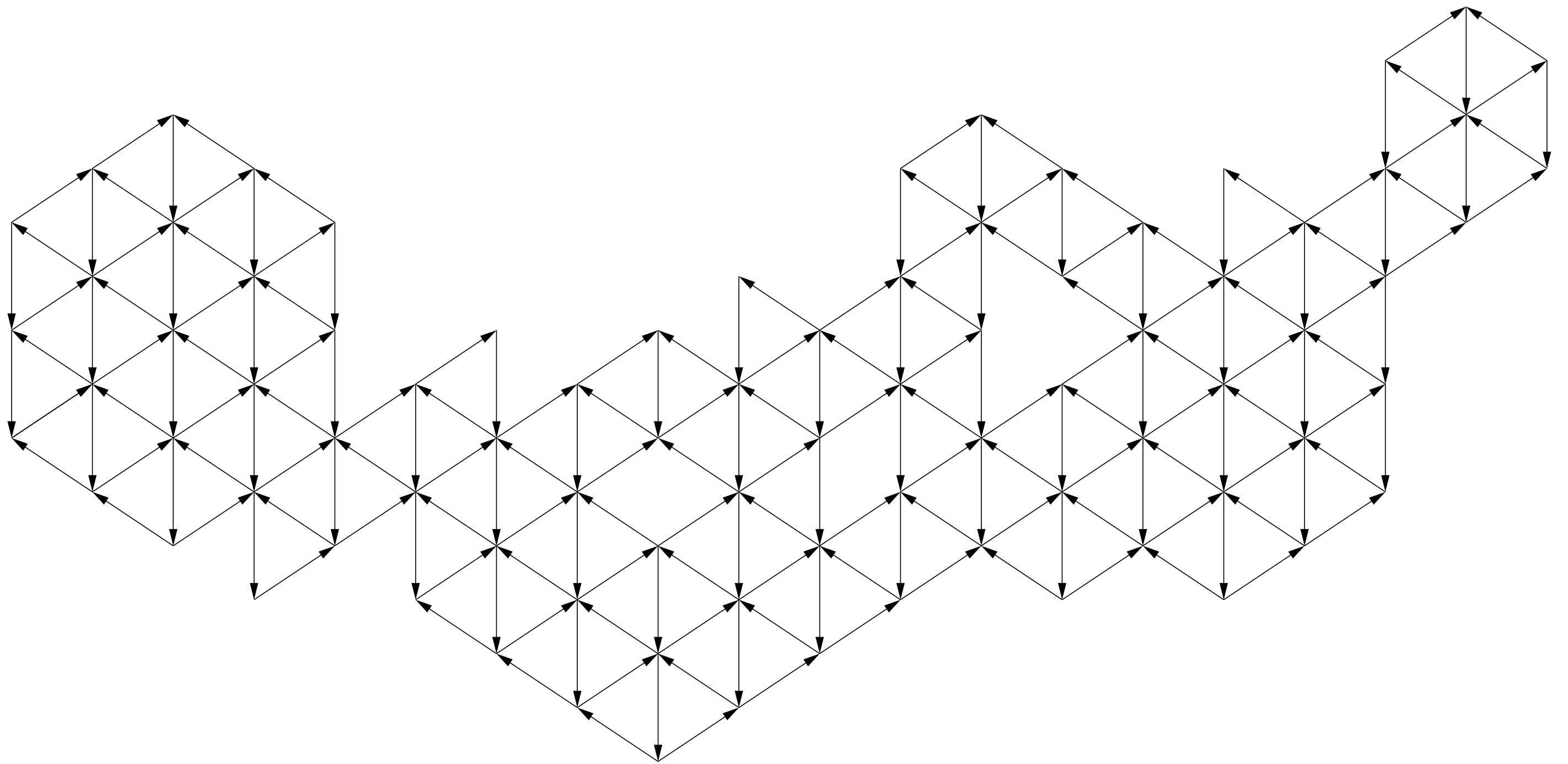
Soit G un graphe orienté. On définit la polycellule (\mathcal{C}, I, v^*) par :

- un ensemble $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_k\}$ de cycles de G ;
- un sous-ensemble I des arêtes E de G appartenant à au moins un des cycles de \mathcal{C} ;
- un sommet particularisé v^* , quelconque, mais utilisé par au moins un cycle.

Les cycles de \mathcal{C} sont appelés cellules, les arêtes de I arêtes intérieures et celles de $B = E \setminus I$ arêtes extérieures.



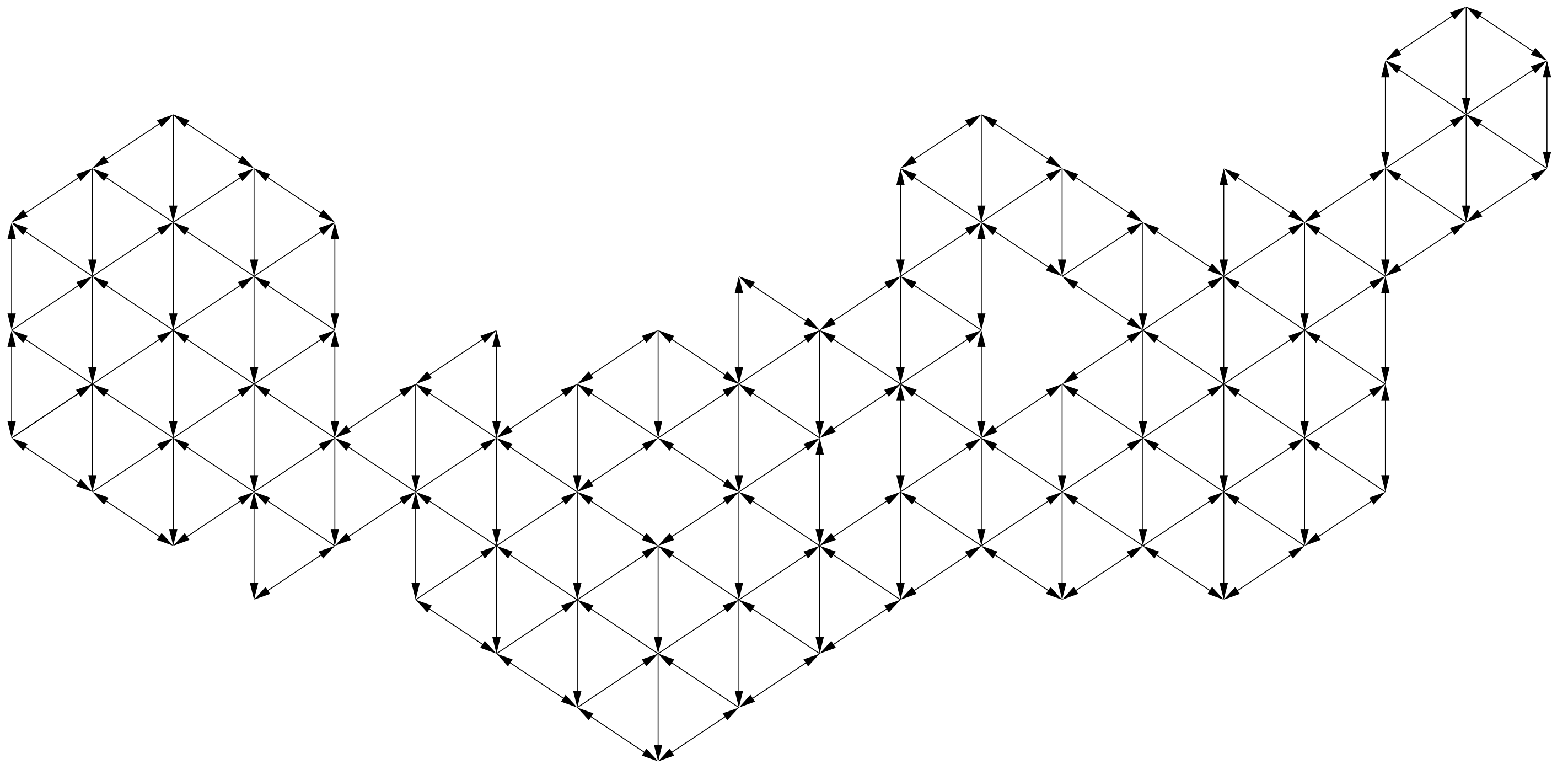
Coloration en damier du domaine...



et polycellule associée (une cellule par case triangulaire).

Définition 2 (Graphe d'une polycellule)

Le graphe d'une polycellule (\mathcal{C}, I, v^) est le graphe constitué par les sommets et arêtes des cycles de \mathcal{C} , auquel on adjoint, pour chaque arête orientée extérieure $(v, v') \in B$, l'arête orientée retour (v', v) .*



Le graphe de la polycellule.

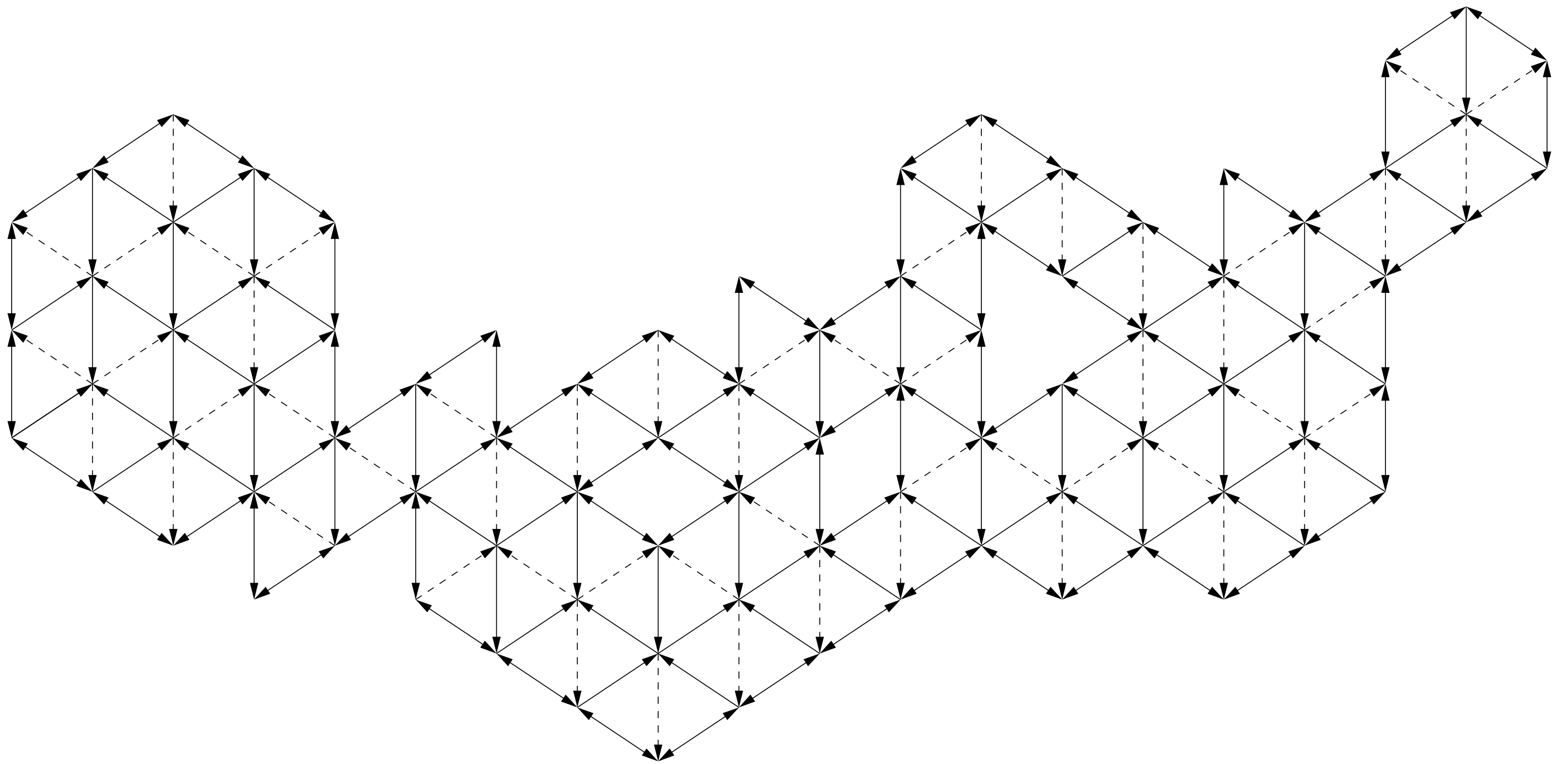
Définition 3 (Pavage d'une polycellule)

Soit (\mathcal{C}, I, v^*) une polycellule. Pour une arête $a \in I$, on note $cell(a)$ le sous-ensemble des cellules de \mathcal{C} utilisant a . Un pavage de (\mathcal{C}, I, v^*) est alors un sous-ensemble T de I tel que $\{cell(a)\}_{a \in T}$ soit une partition de \mathcal{C} .

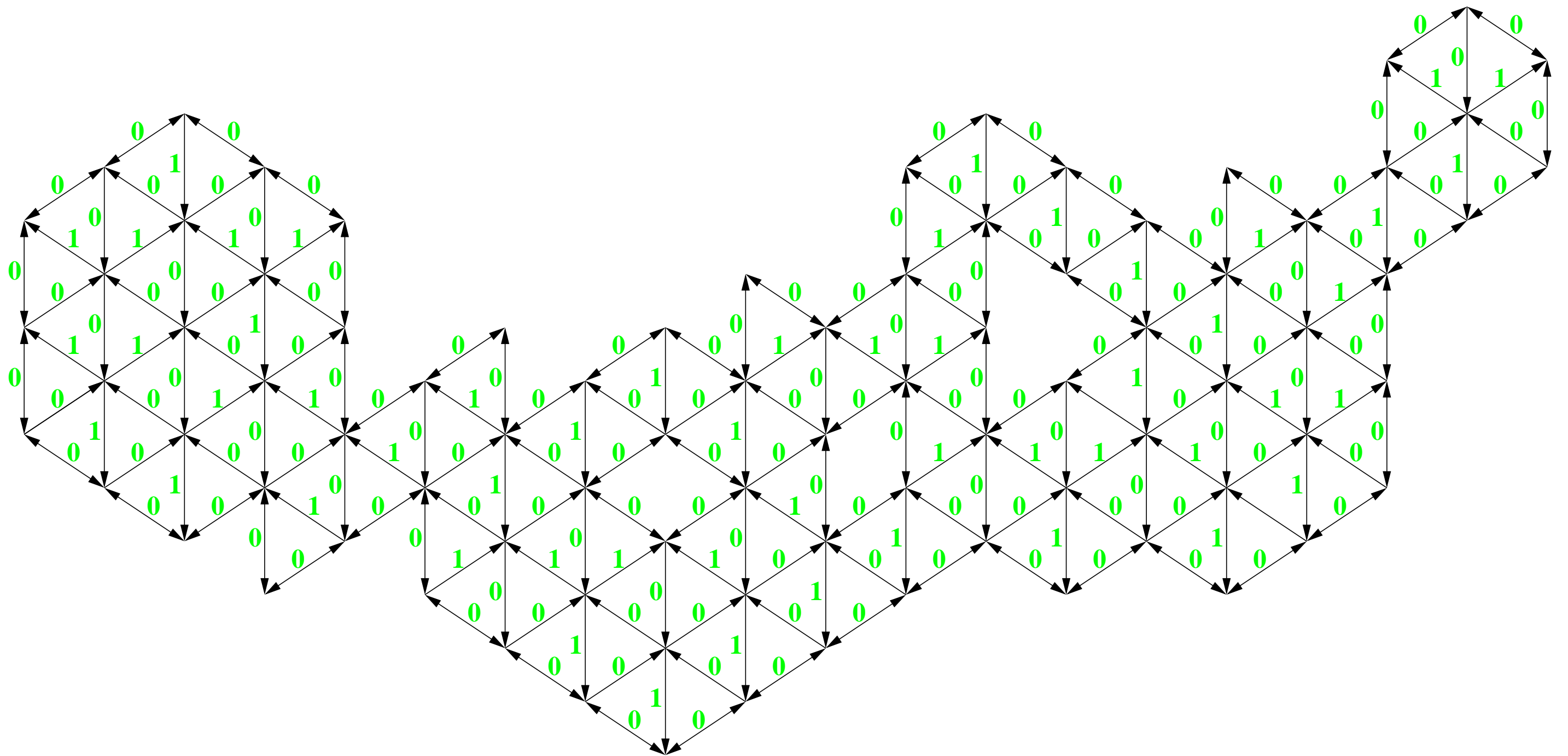
Définition 4 (Compteur (binaire))

Un compteur ψ sur une polycellule (\mathcal{C}, I, v^*) est une valuation réelle des arêtes des cellules de \mathcal{C} nulle sur les arêtes extérieures et valant toute cellule à 1.

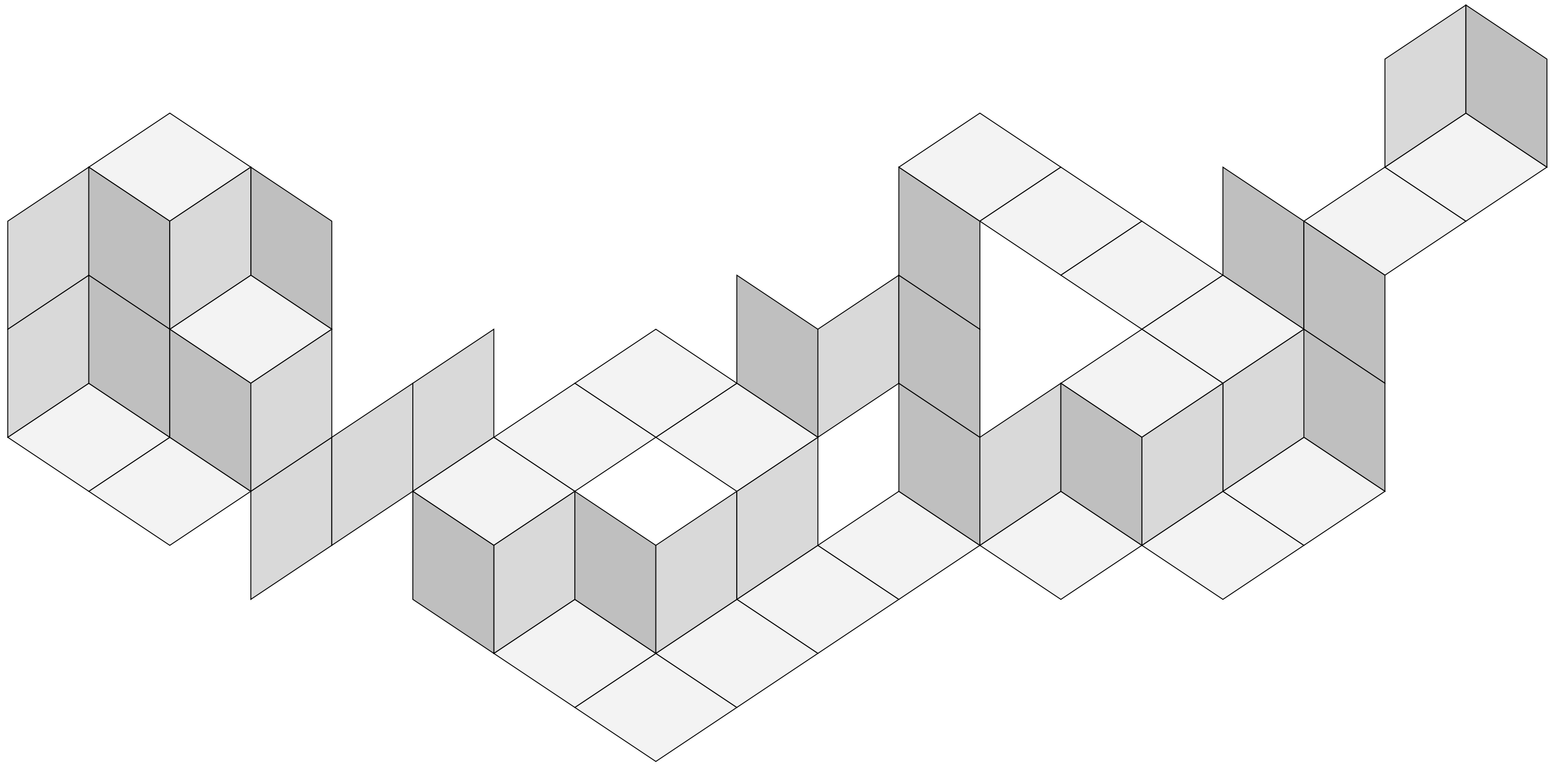
Il est binaire si, de plus, il ne prend que les valeurs 0 ou 1.



Un pavage de la polycellule (arêtes en pointillés).

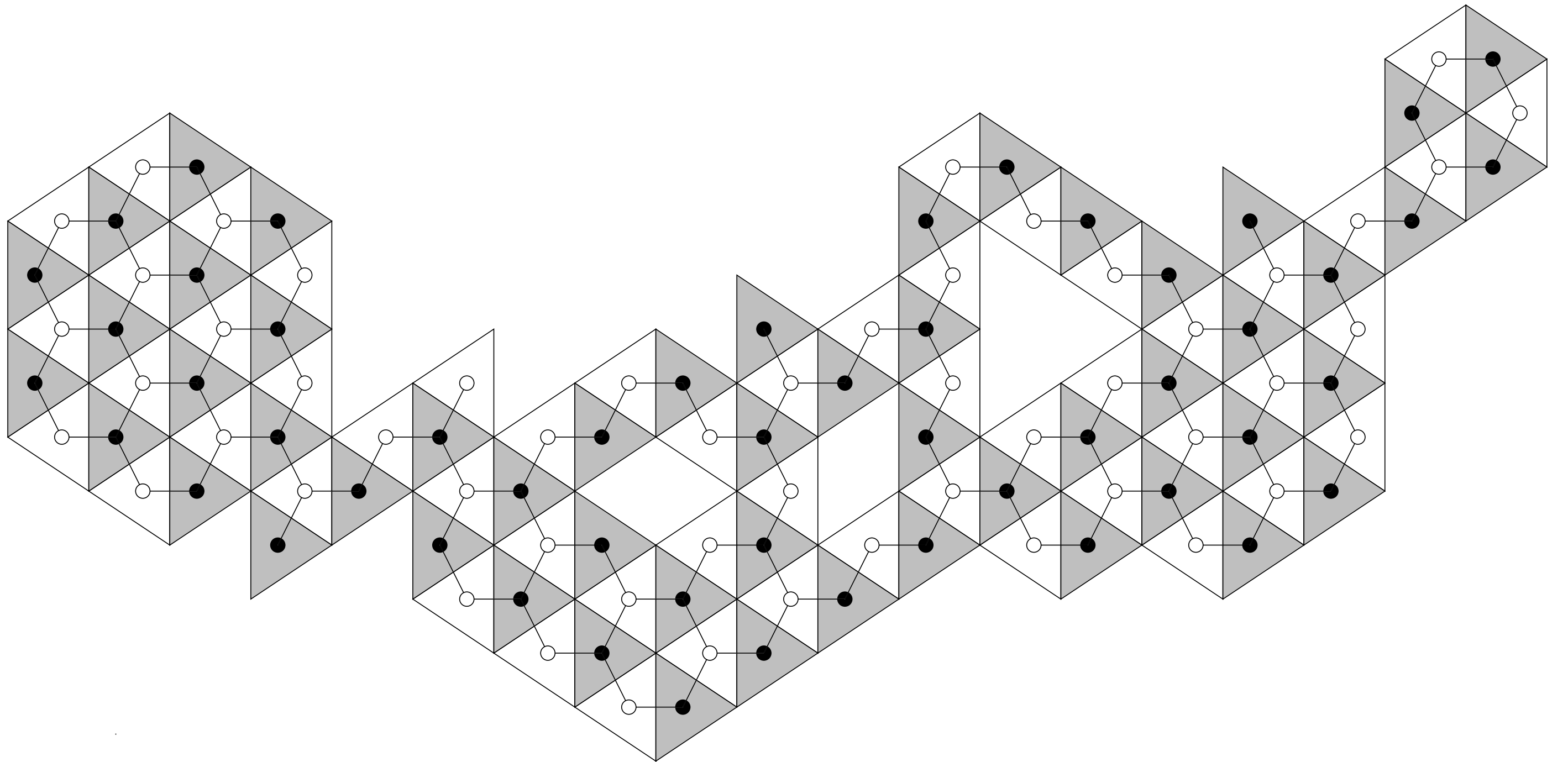


Le compteur binaire bijectivement associé.

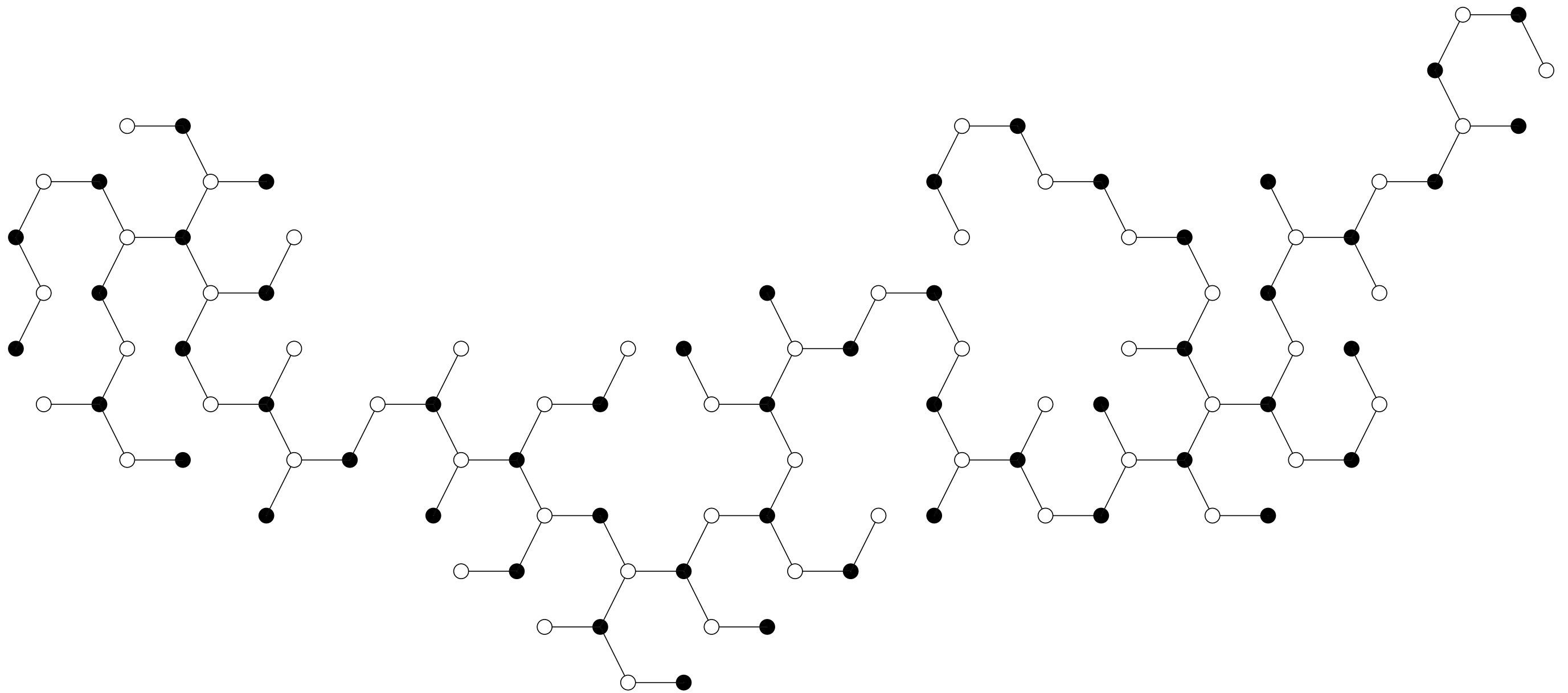


Le pavage par tuiles (losanges) correspondant.

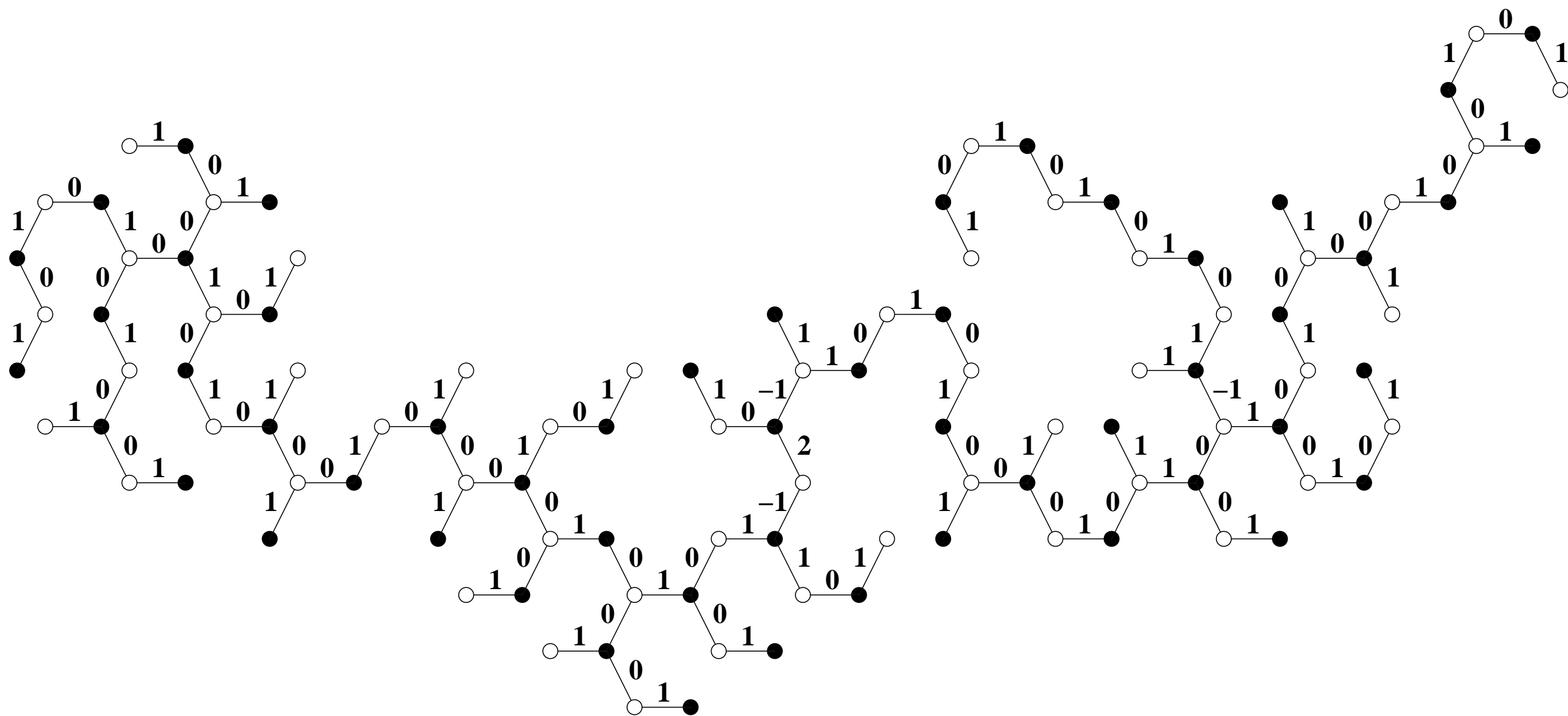
Construction d'un pavage



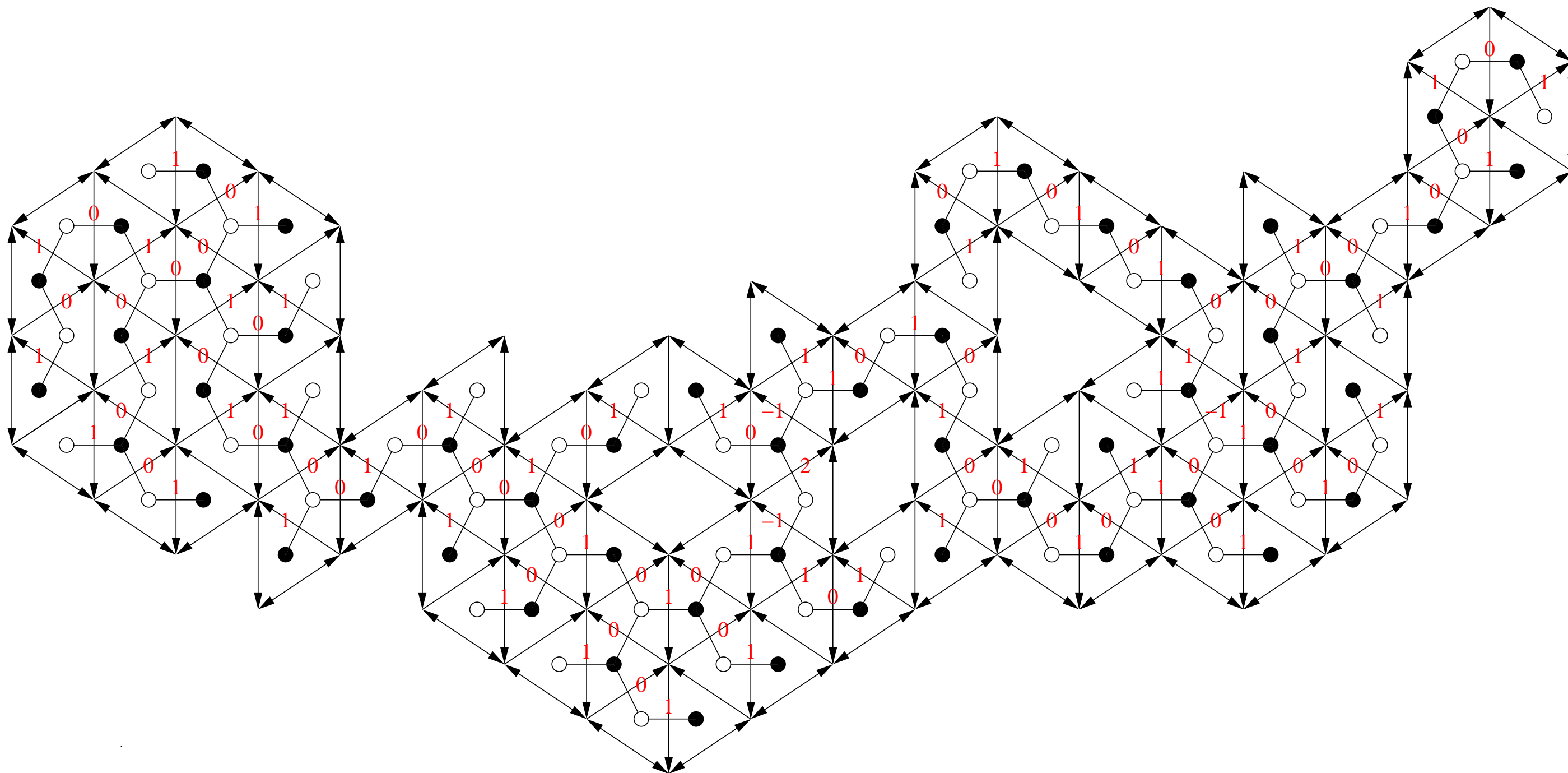
Graphe interne d'une polycellule bipartite.



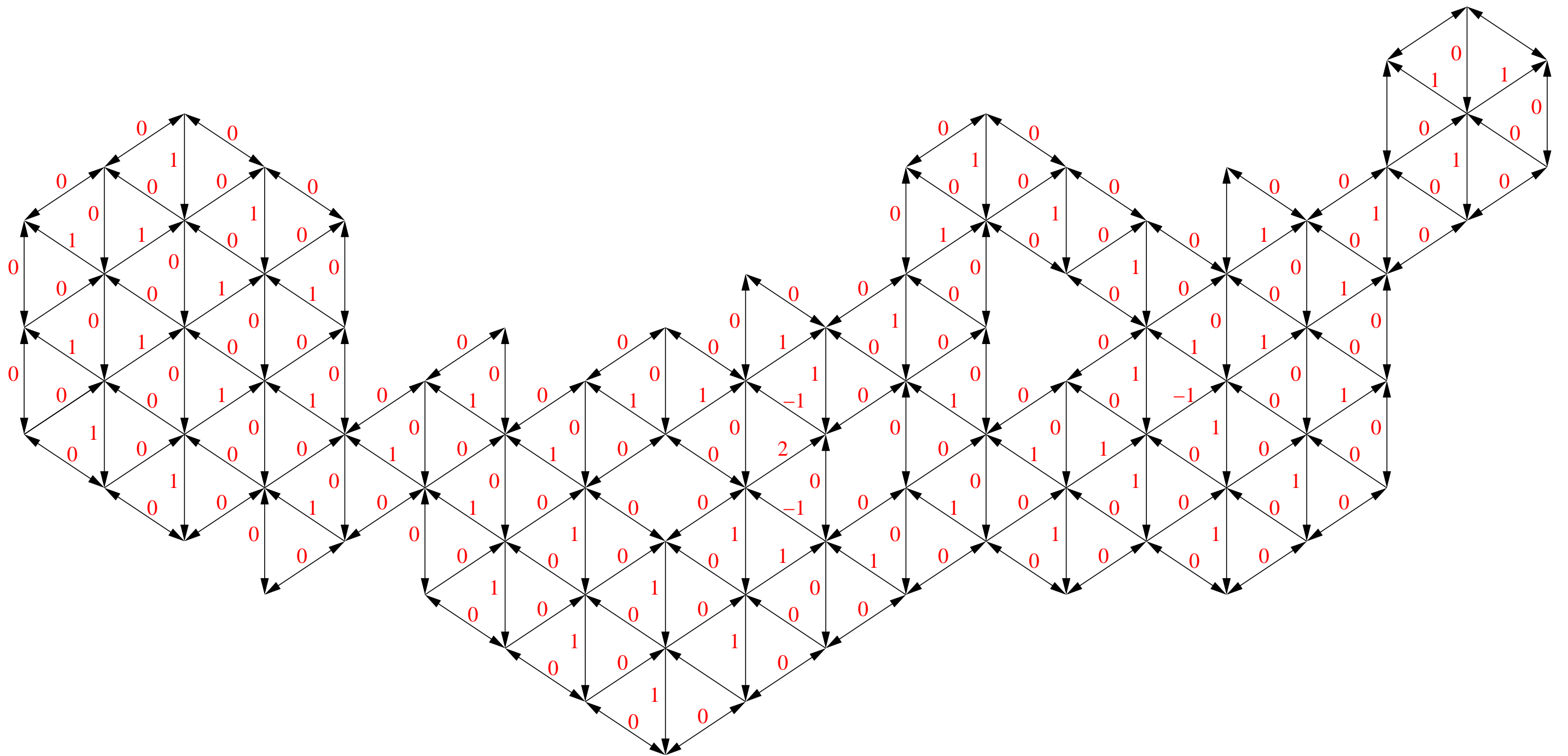
Un arbre couvrant de ce graphe interne.



La somme des valuations des arêtes adjacentes à un sommet vaut 1 (calcul en $\mathcal{O}(n)$)



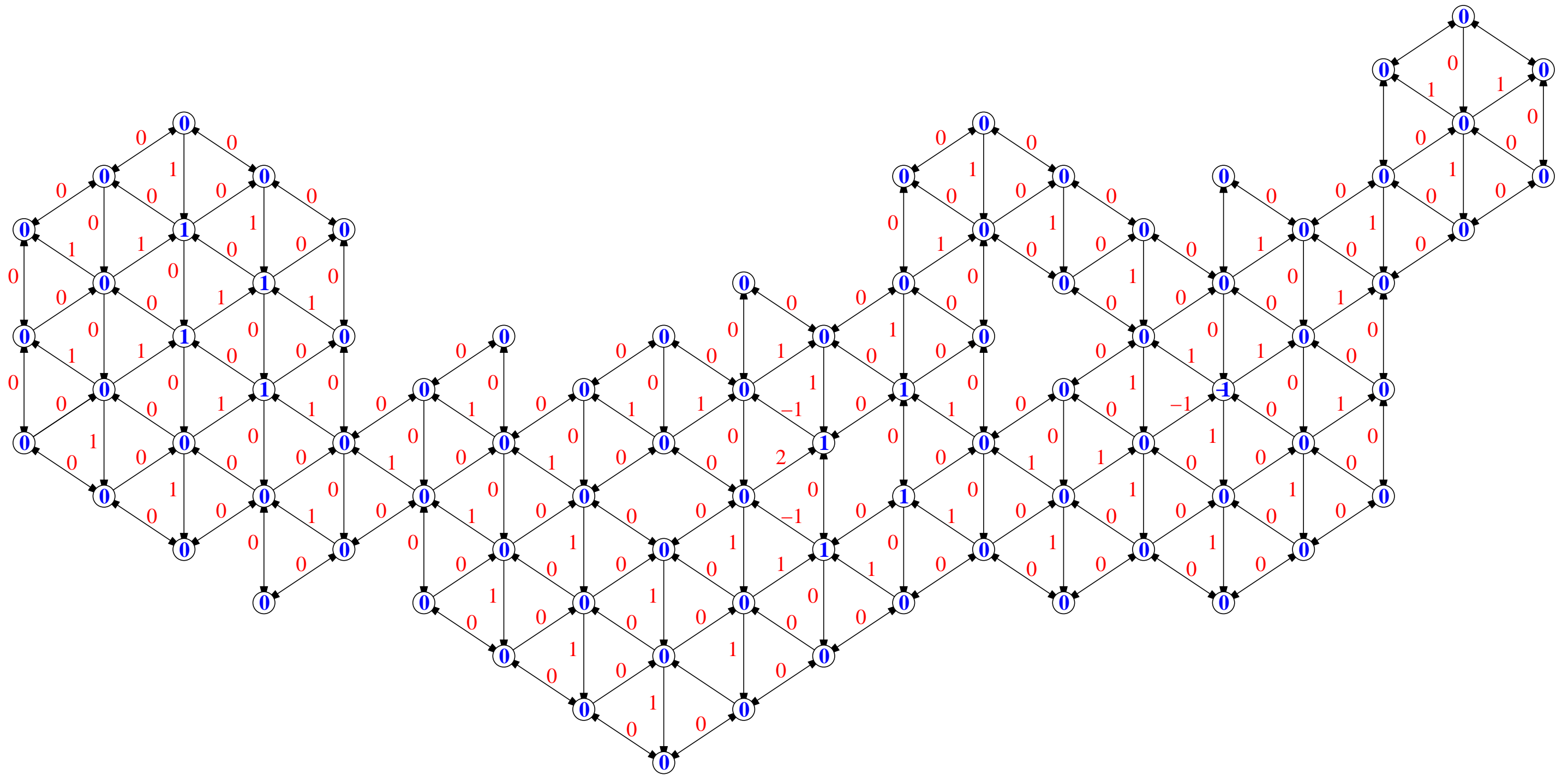
On transpose cette valuation sur la polycellule. . .



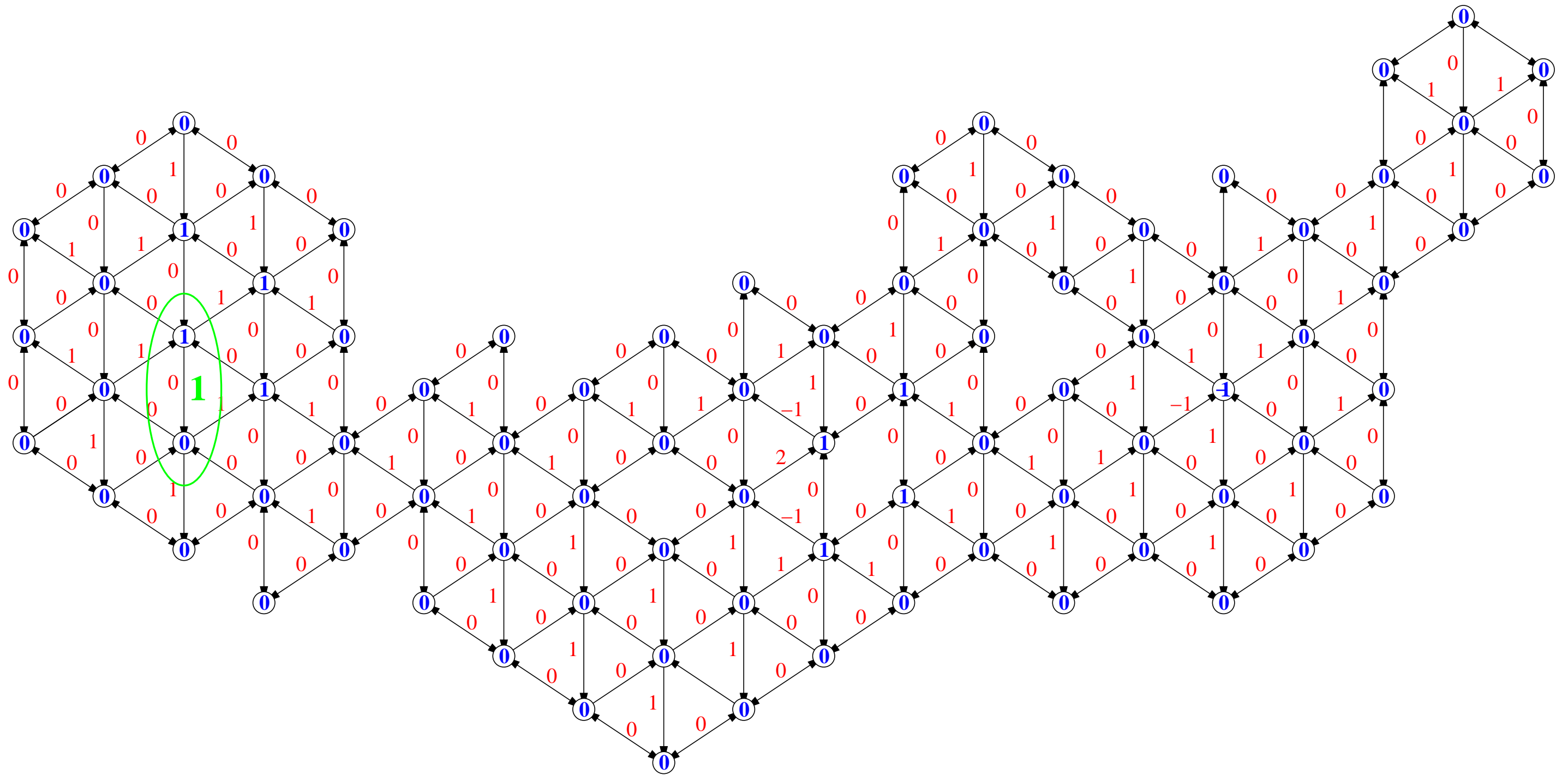
et on obtient un **compteur** ψ .

Définition 5 (Potentiel d'un compteur)

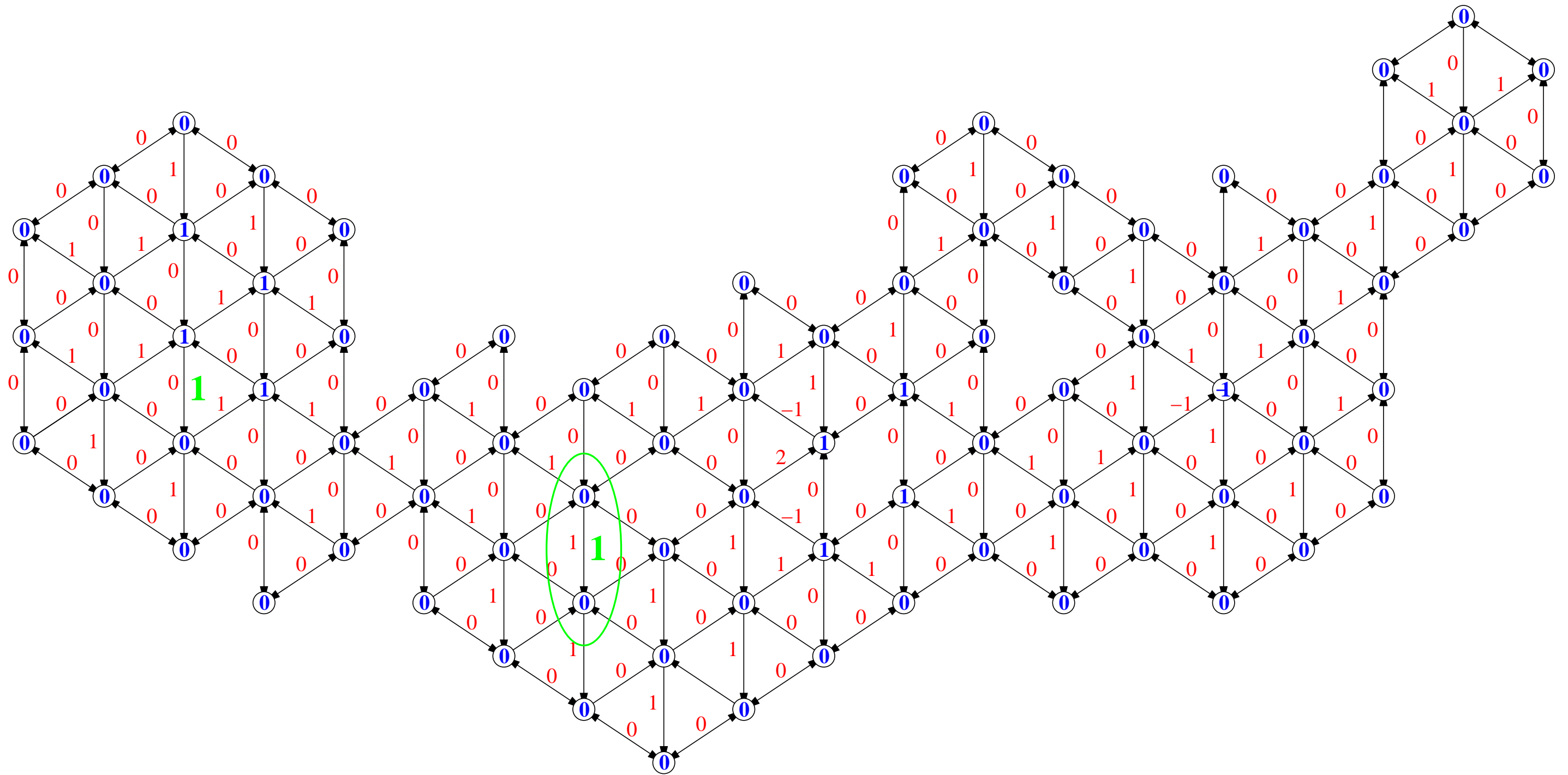
Le potentiel d'un compteur ψ , noté h_ψ , est la fonction à valeurs dans \mathbb{R} qui, à un sommet v de G , associe le poids d'un plus court chemin pour ψ de v^ à v .*



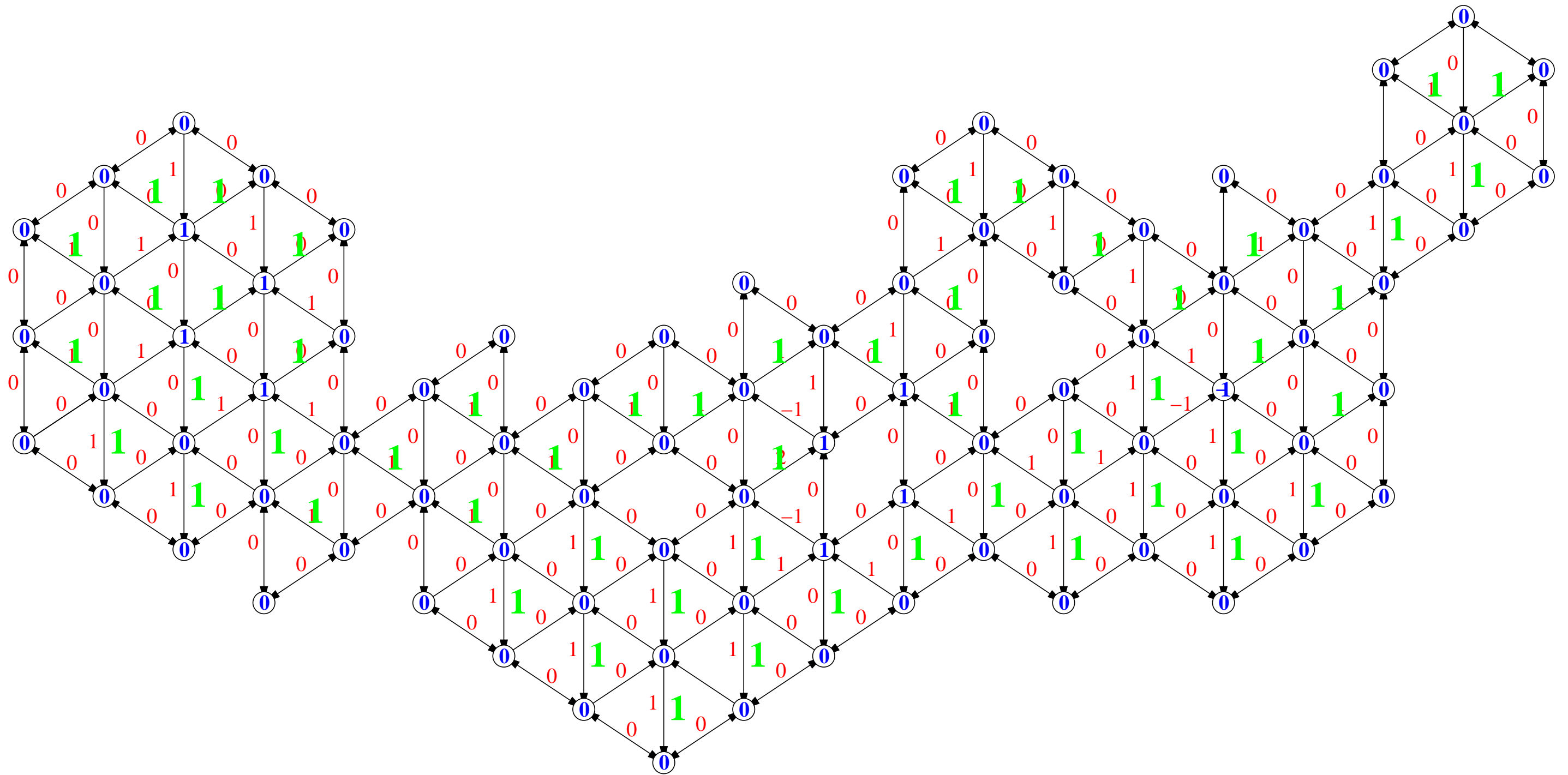
Le potentiel h_ψ de ψ (en bleu) s'obtient par un calcul de **plus courts chemins** ($\mathcal{O}(n \ln(n)^3)$ ici).



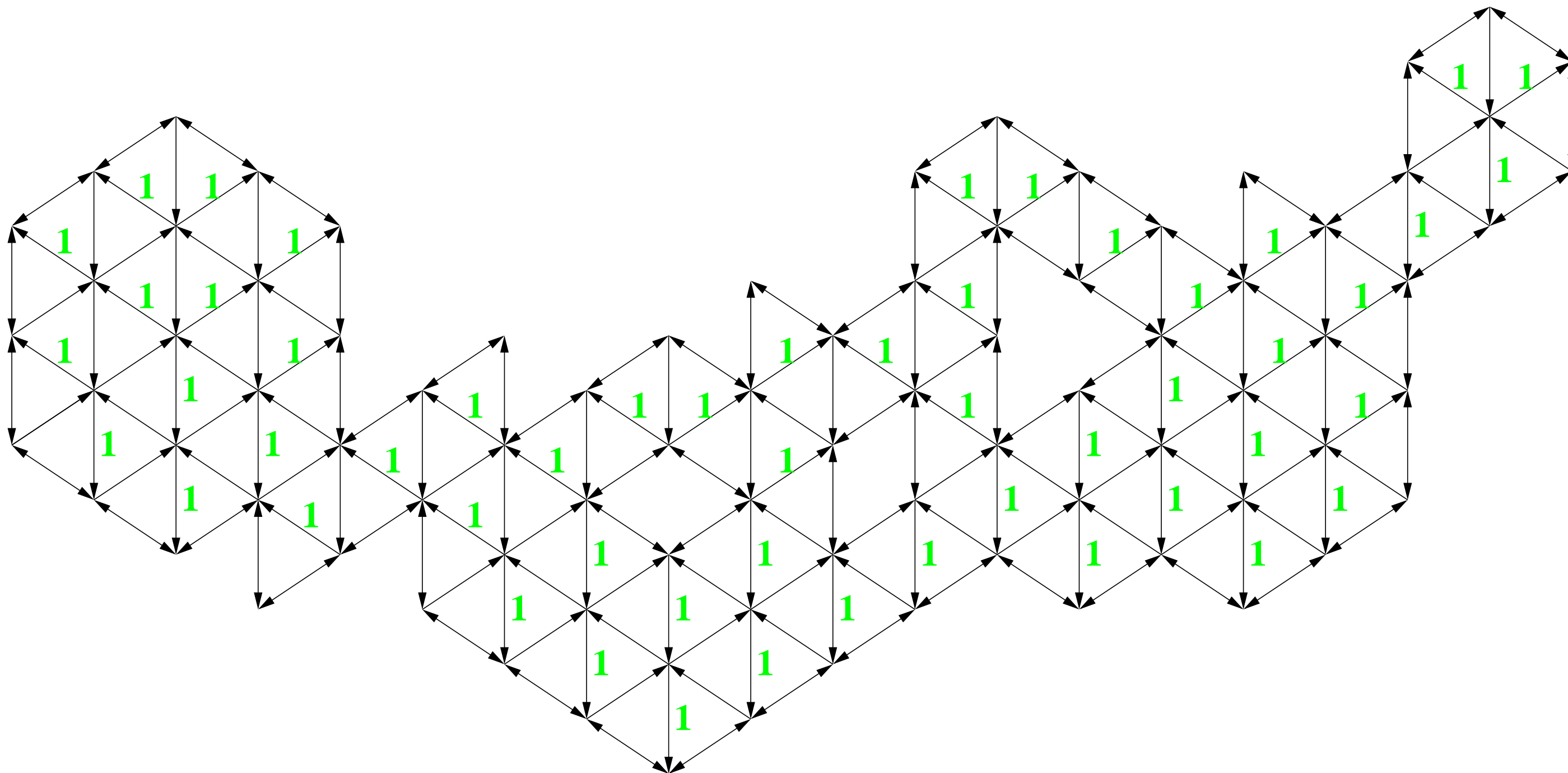
Pour une arête $e = (v, v')$, on pose : $\delta(e) = h_\psi(v) + \psi(e) - h_\psi(v')$.



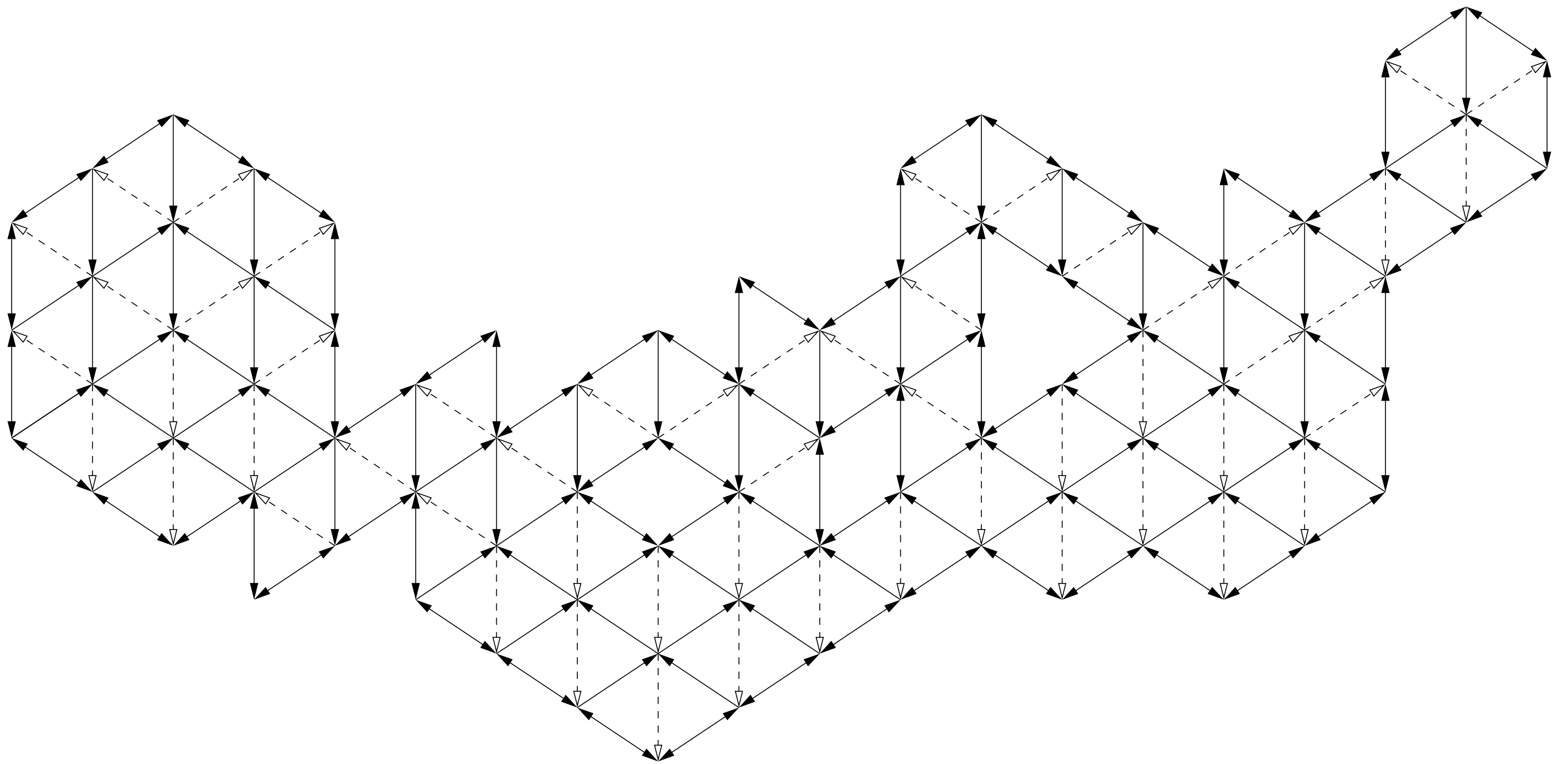
$$\delta(e) = h_\psi(v) + \psi(e) - h_\psi(v') \quad (\text{encore})$$



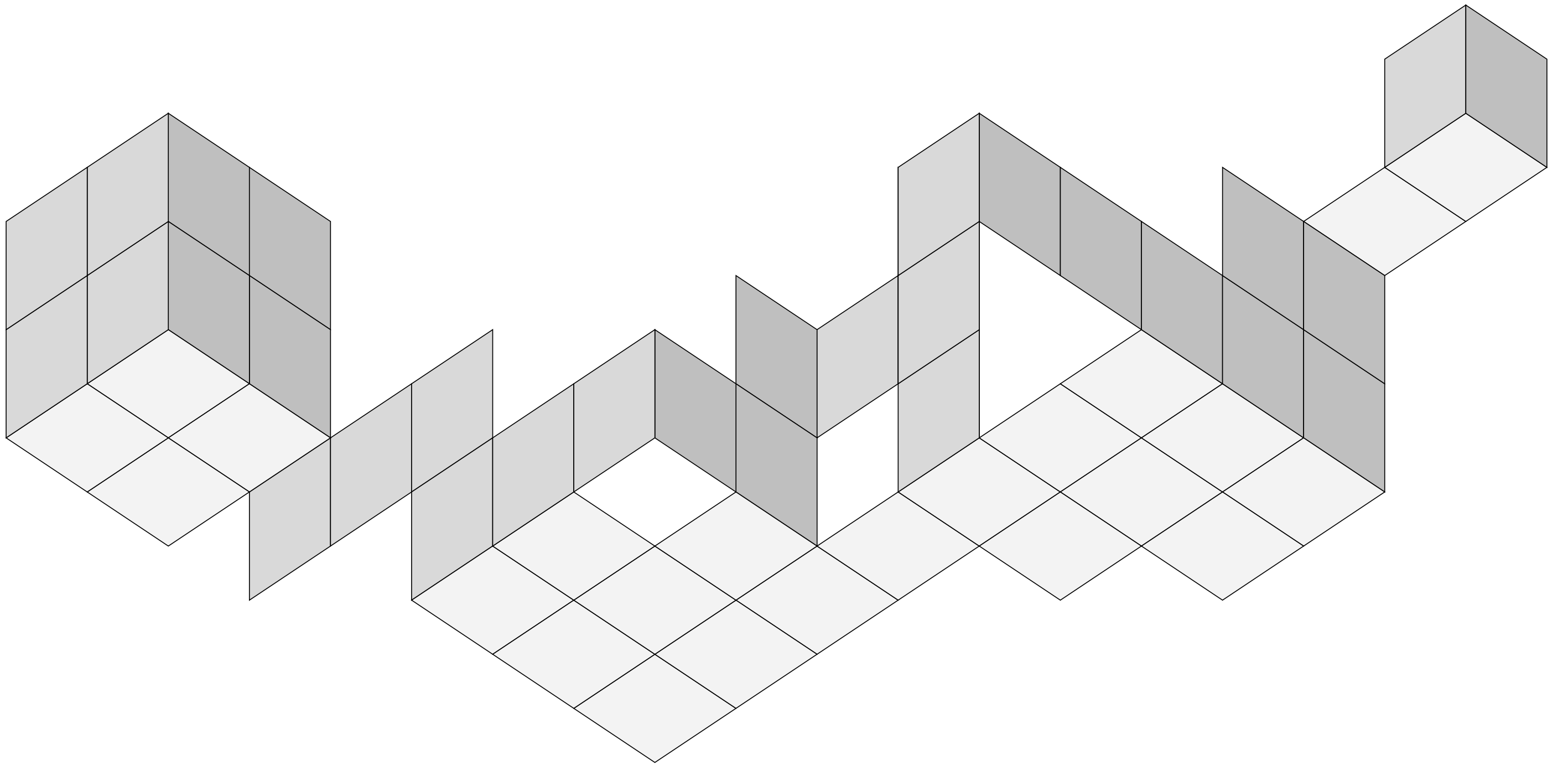
$$\delta(e) = h_\psi(v) + \psi(e) - h_\psi(v') \text{ (toujours)}$$



On montre que δ est **le compteur binaire** de potentiel identiquement nul.
 (Les valuations nulles ne sont pas reportées sur le schéma.)



Le pavage minimal associé au compteur minimal précédent.

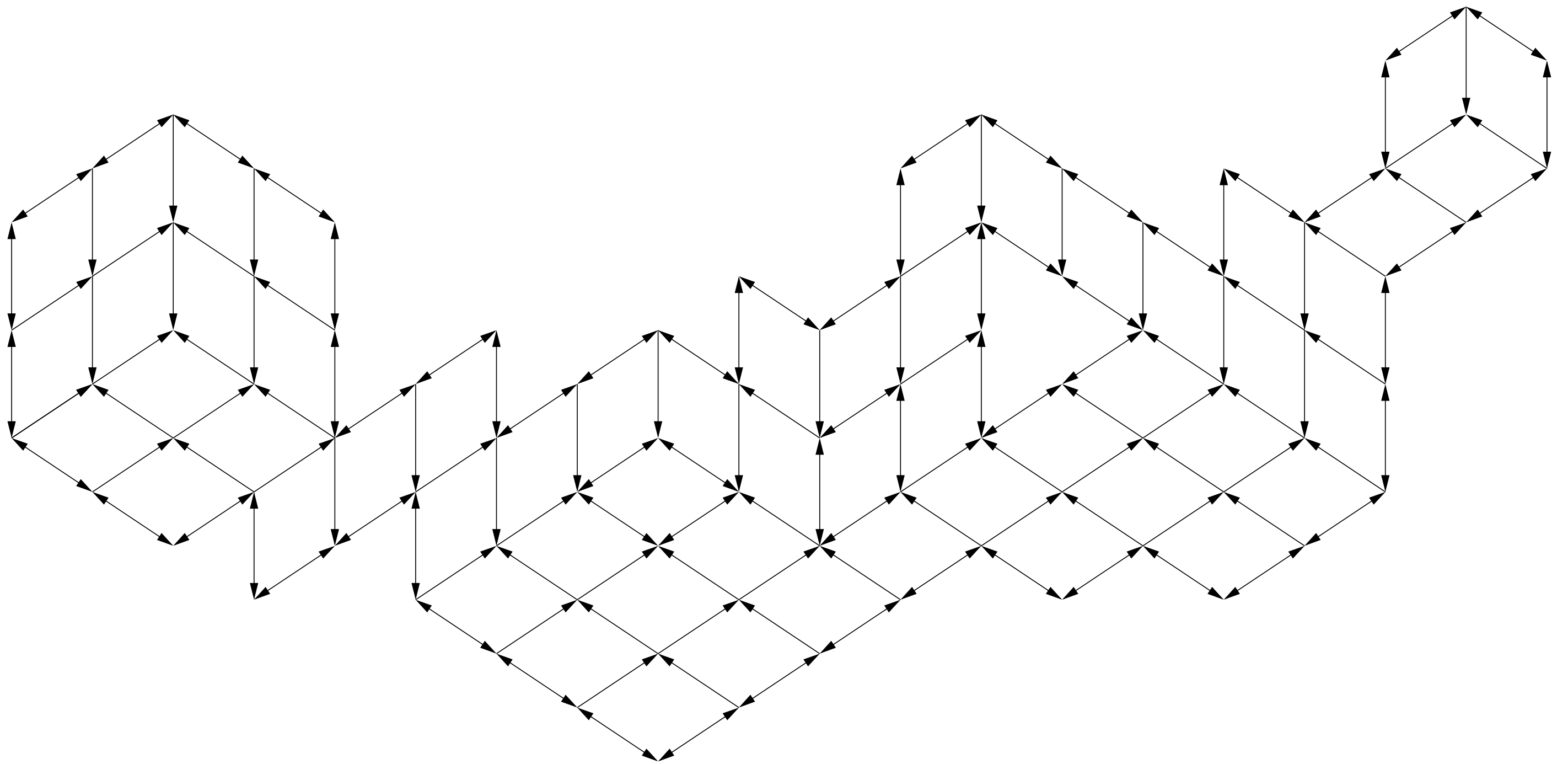


Représentation par tuiles du même pavage.

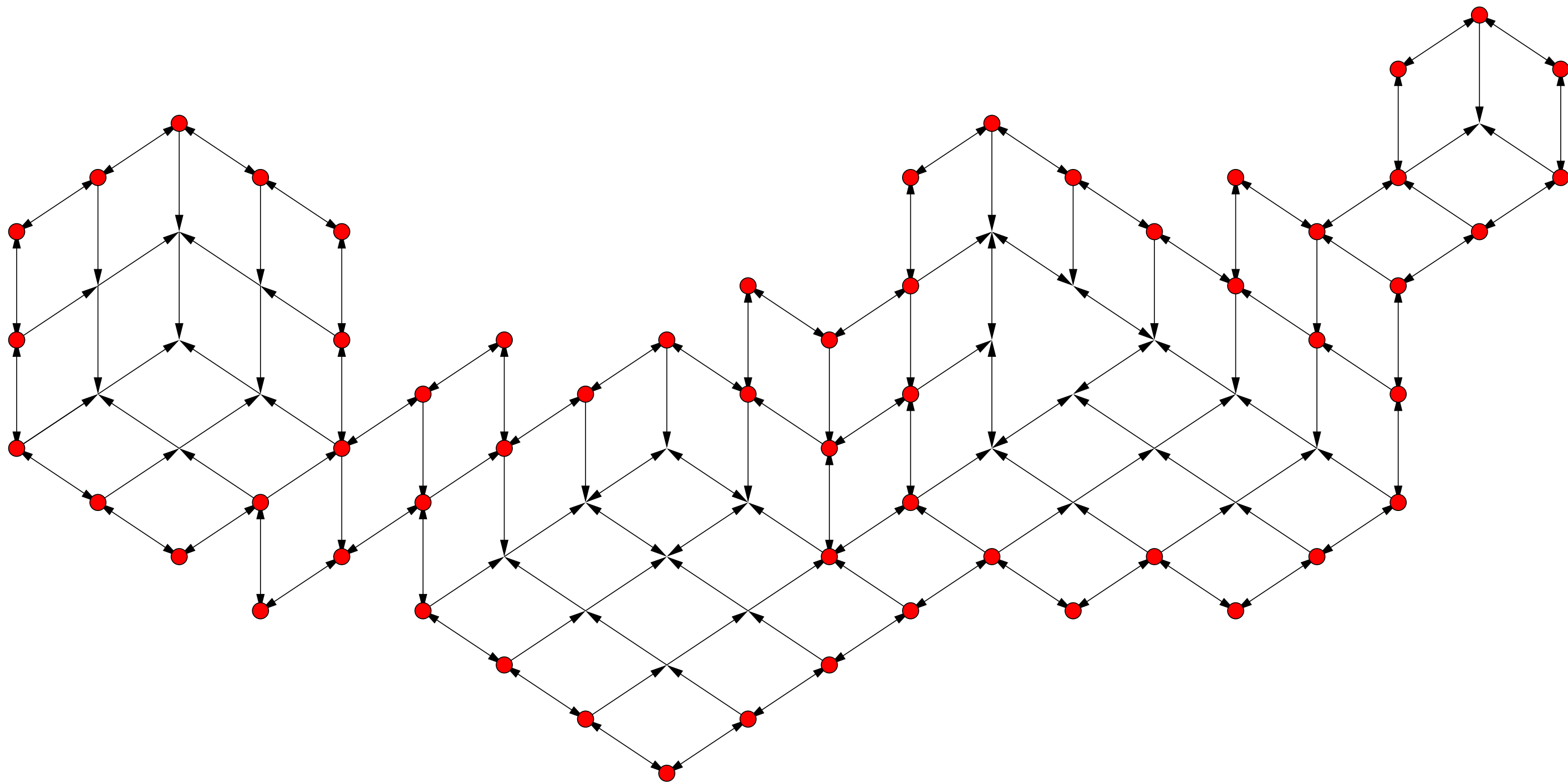
Nodules et décomposition de polycellules

Définition 6 (Nodule)

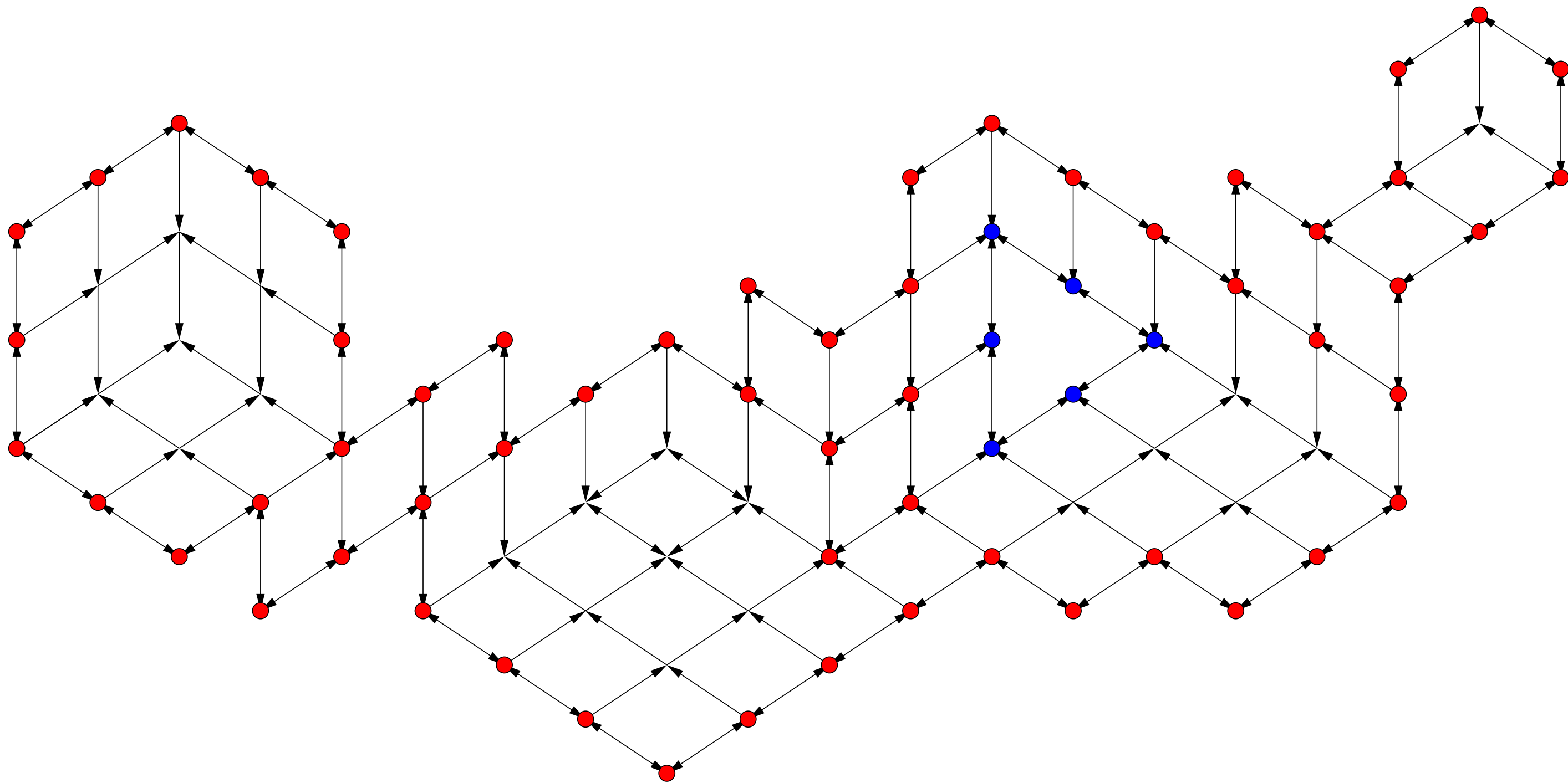
Un sous-ensemble A des sommets du graphe G d'une polycellule est un nodule si A est une composante fortement connexe (maximale pour l'inclusion) du graphe obtenu à partir de G en supprimant les arêtes valuées à 1 par un compteur binaire donné.



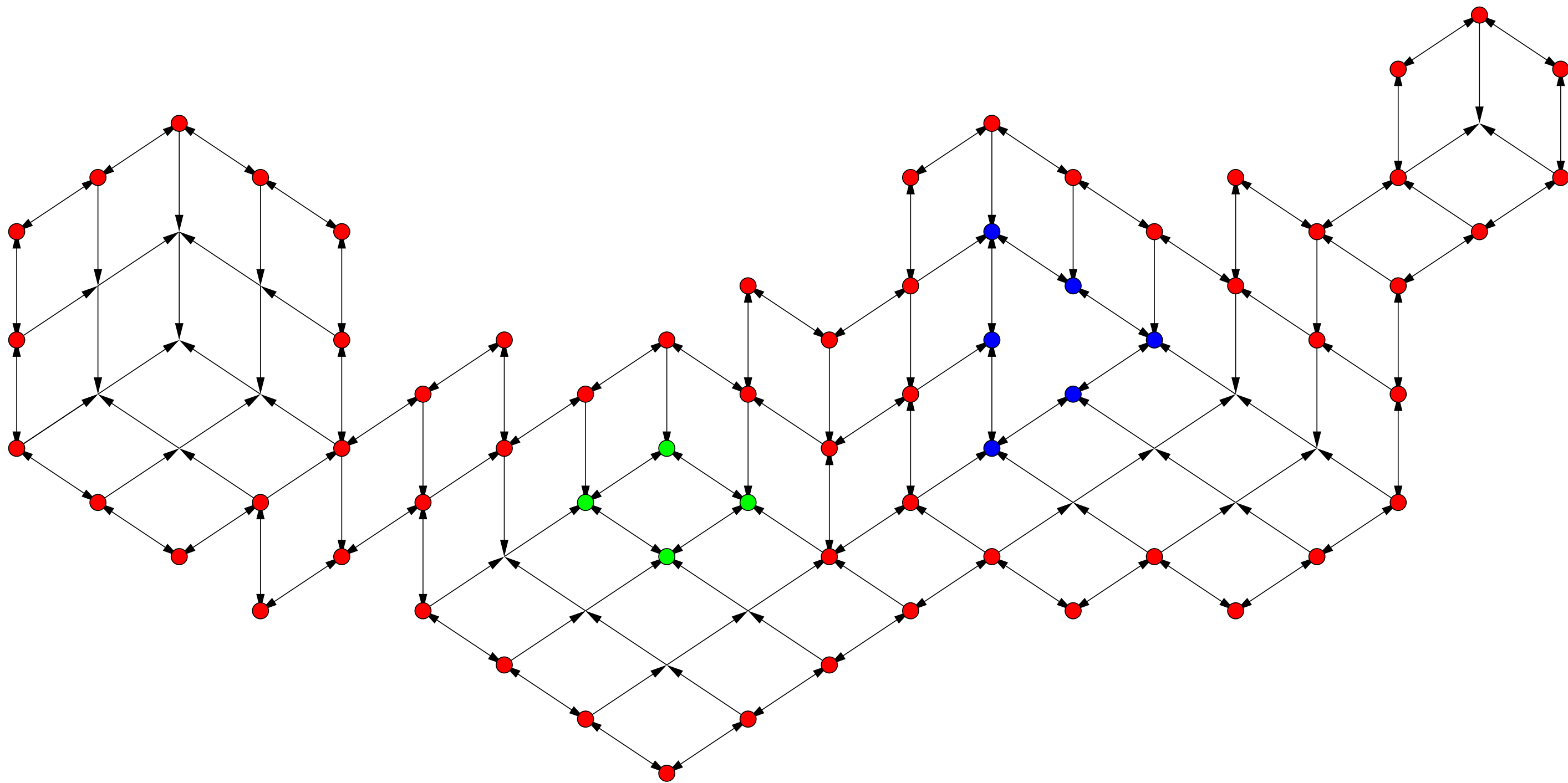
Graphe de la polycellule dans lequel on a supprimé les arêtes d'un pavage.



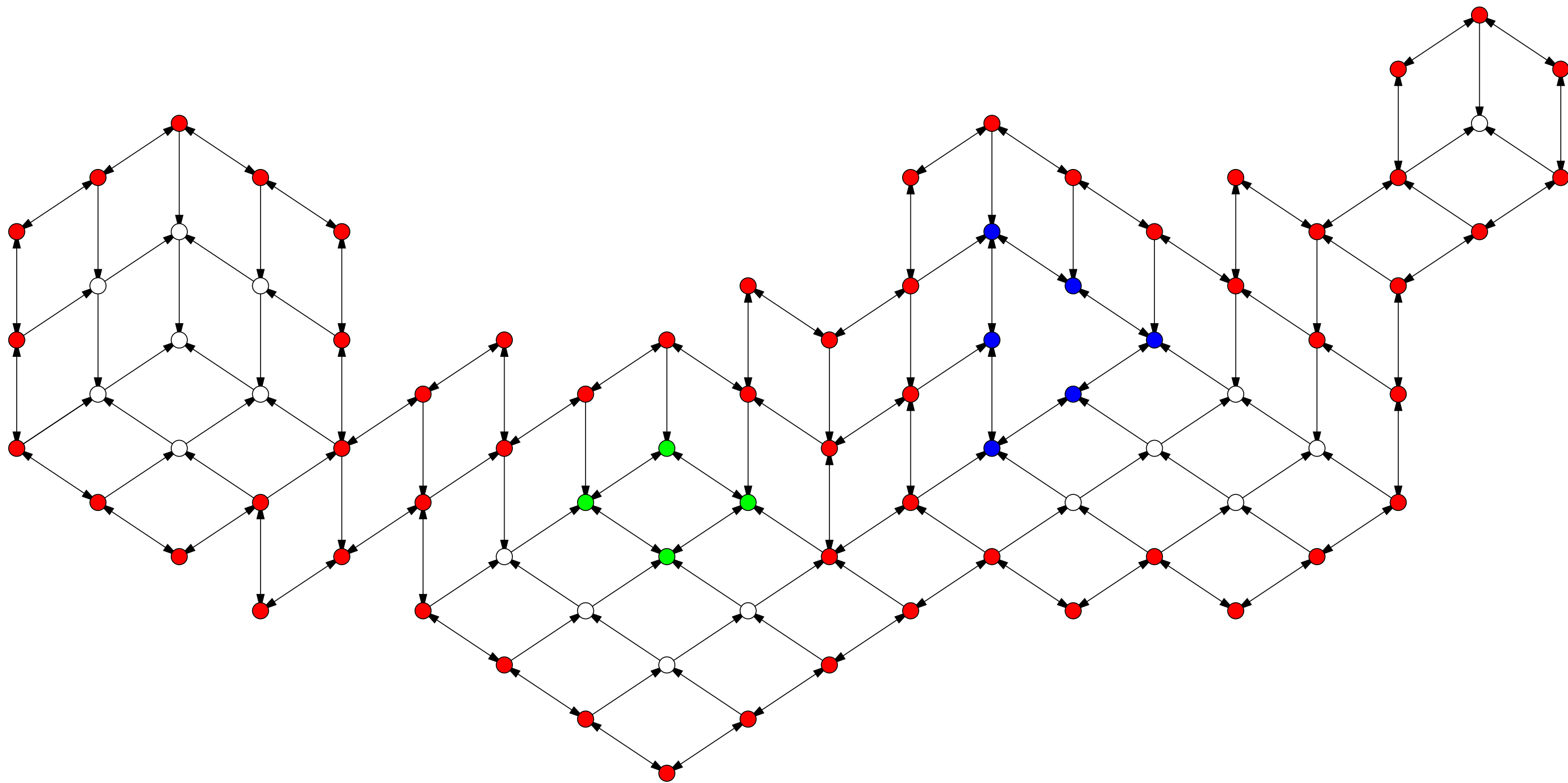
Une première **composante fortement connexe** : le *nodule* "extérieur" A^* (sommets rouges) ;



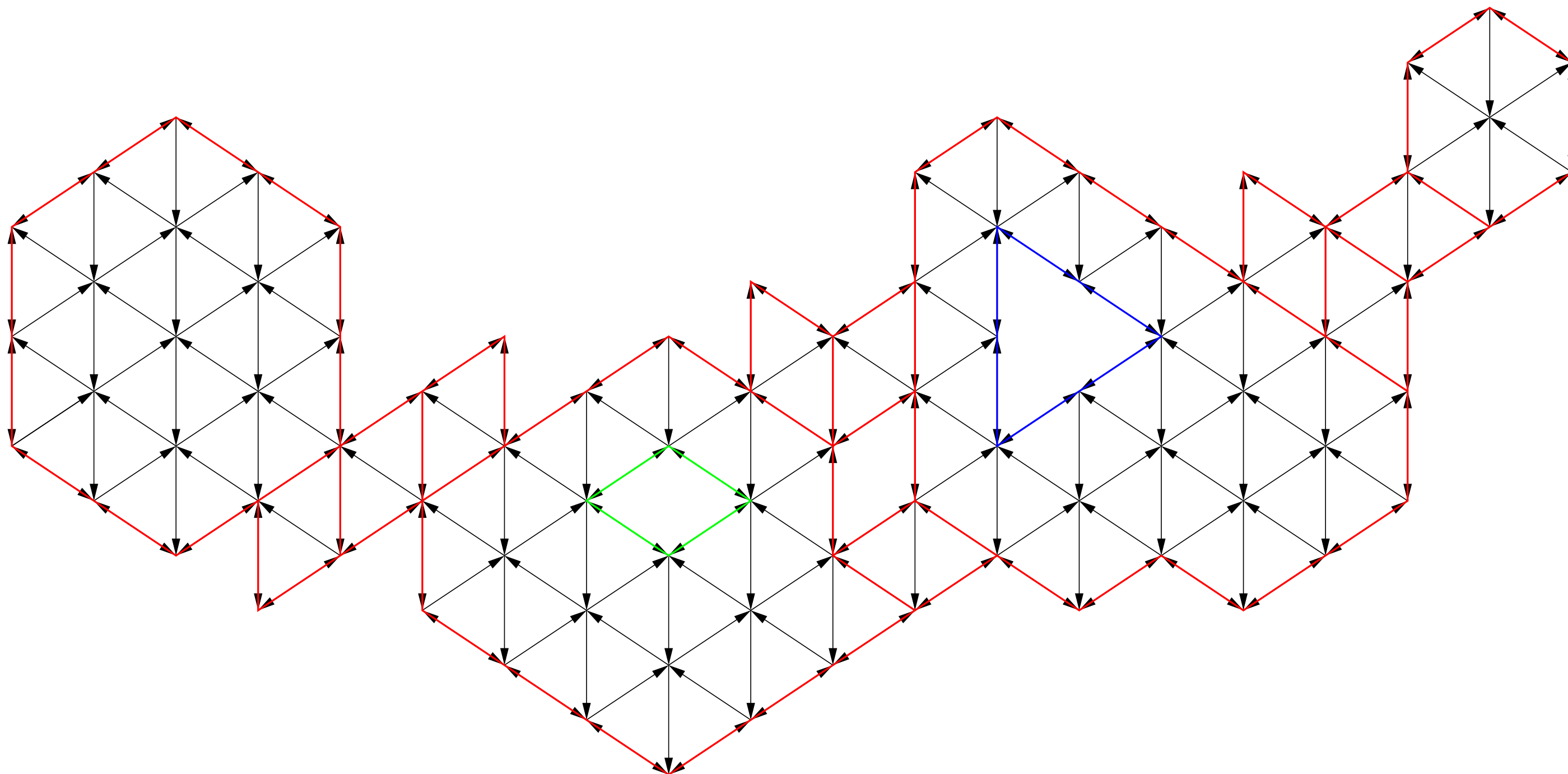
un deuxième nodule (sommets bleus) ;



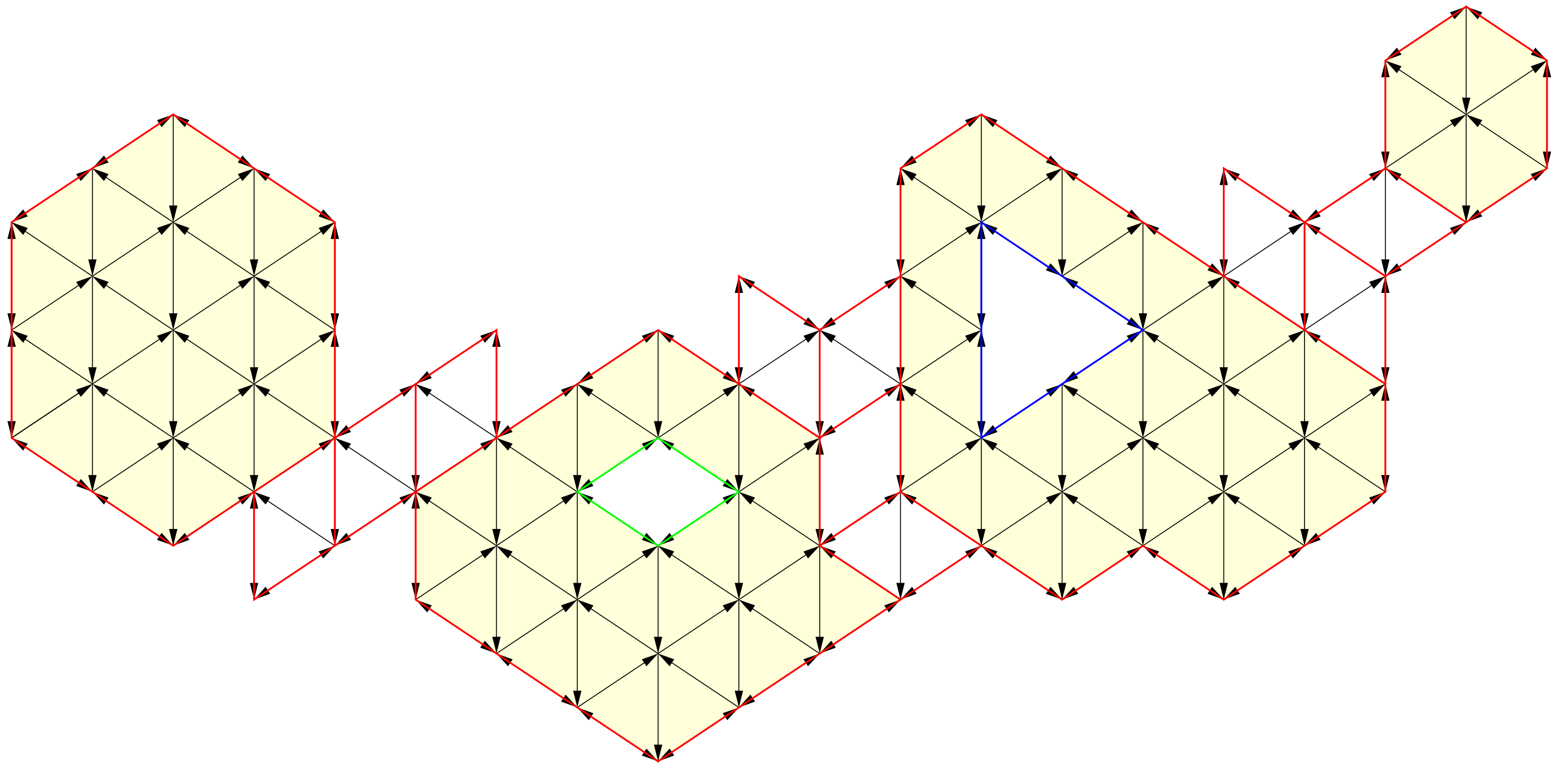
encore un (vert, cette fois) ;



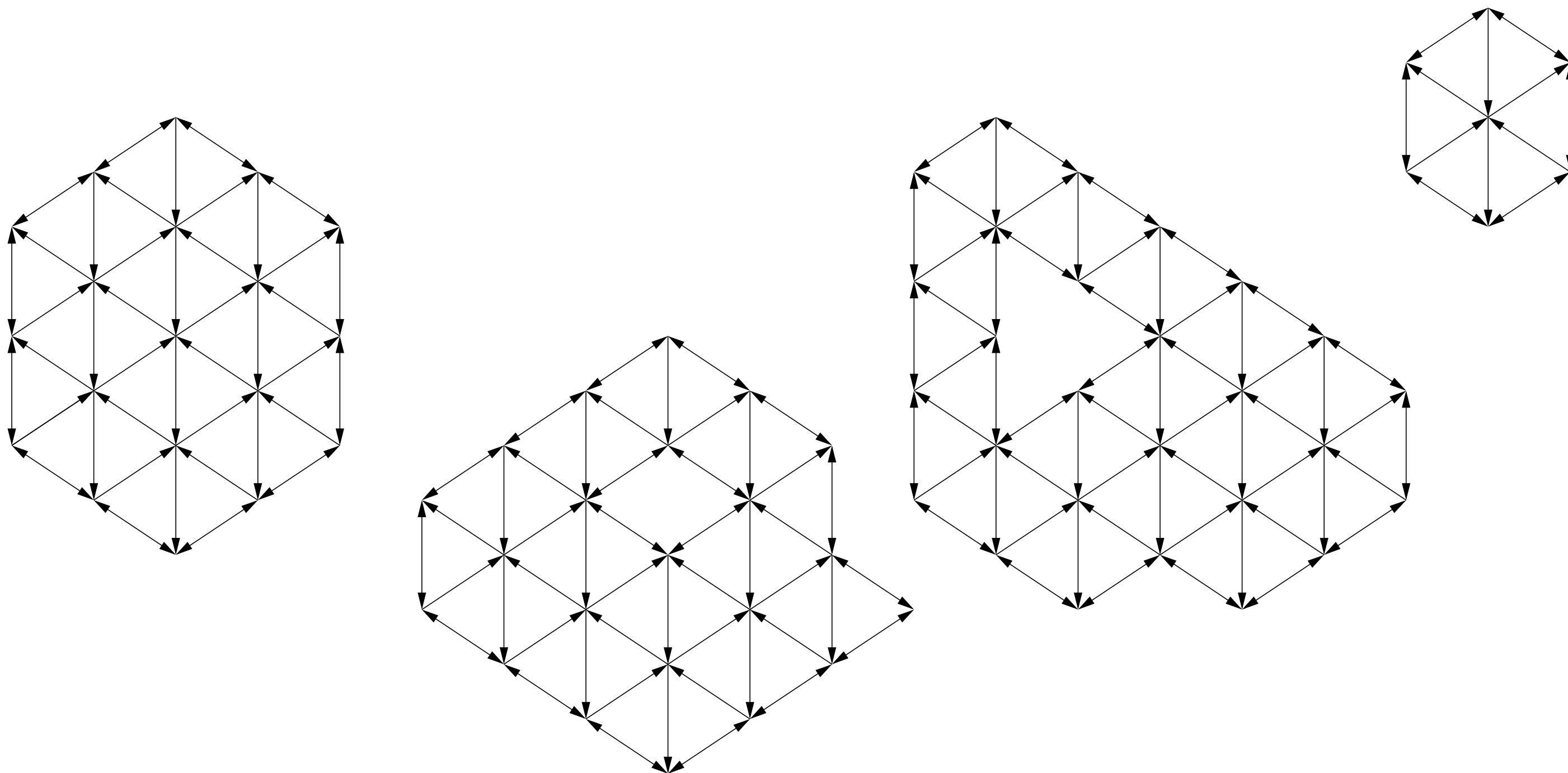
et pour finir, 17 nodules, chacun réduit à un seul sommet (blanc).



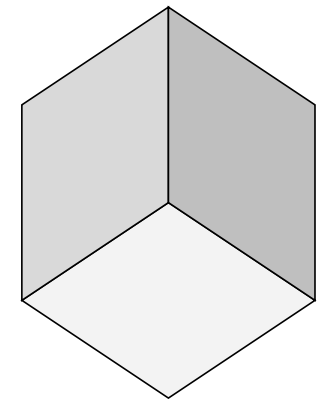
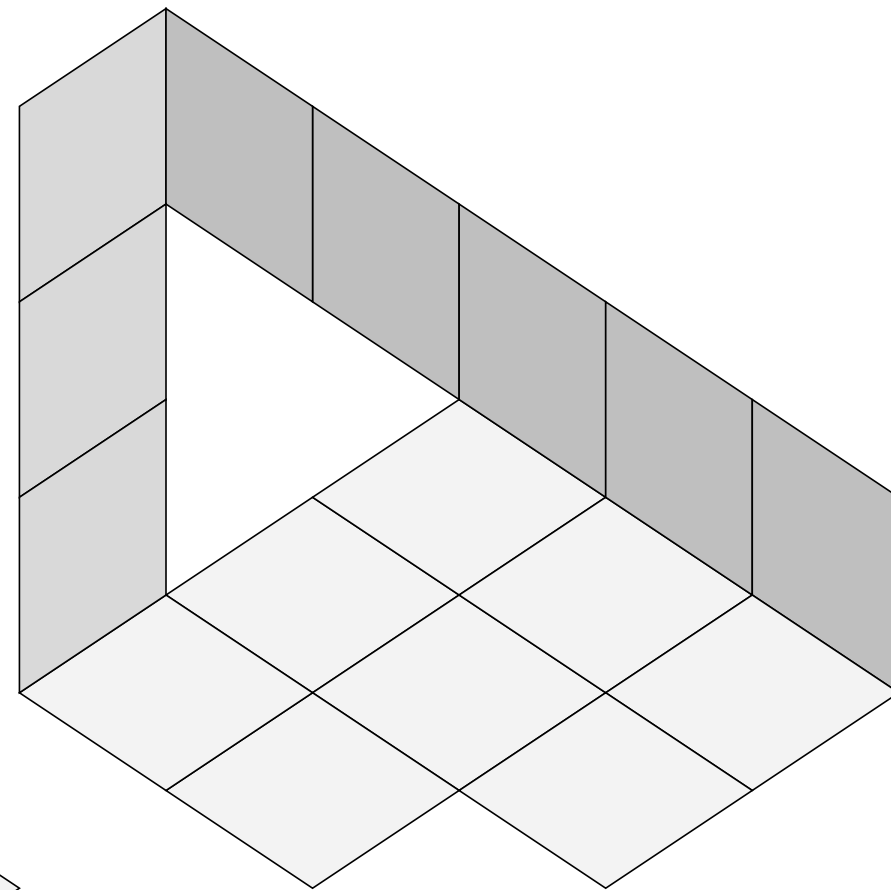
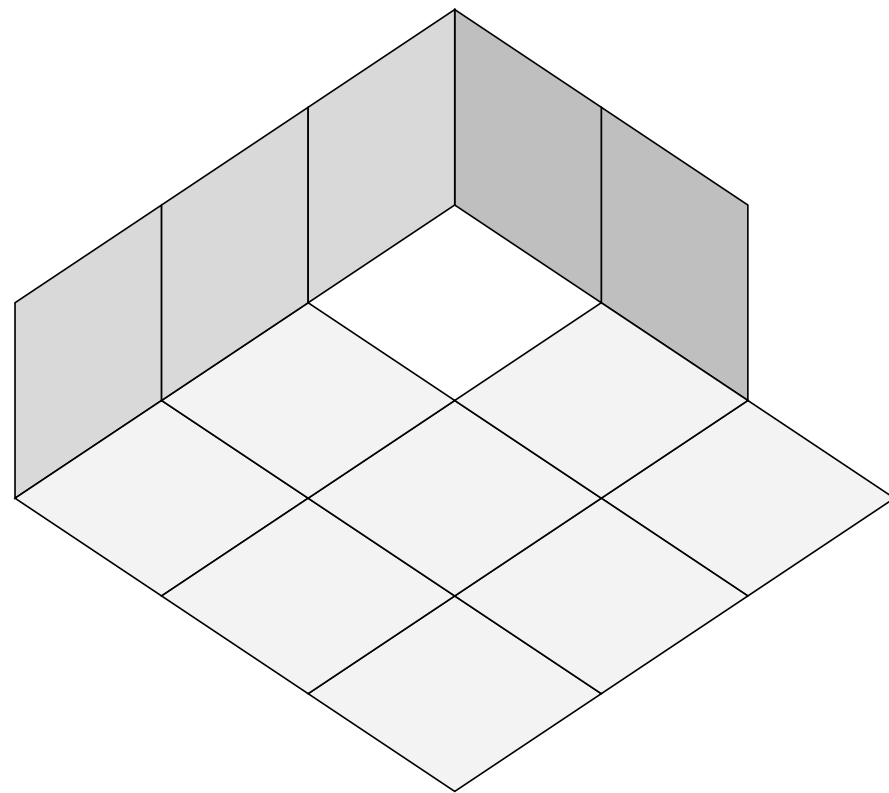
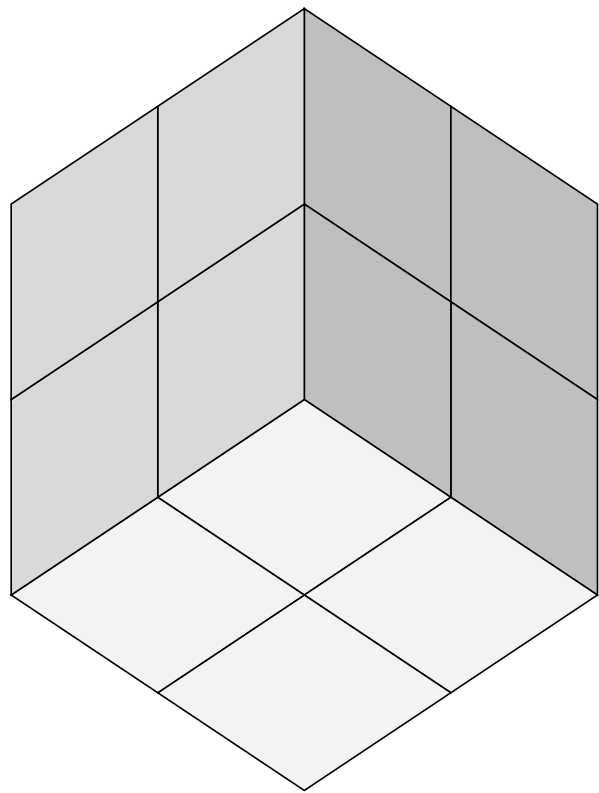
Les arêtes *interdites* sont celles ayant leurs **deux** extrémités dans le **même** nodule.
 Ce sont les seules à n'être **jamais utilisées** par un pavage.



Deux cellules sont *amies* si elles partagent une arête non interdite.
 Ceci décompose (par transitivité) la polycellule en "groupes d'amies".
 Il y a 14 groupes ici, dont 4 intéressants (en jaune).



À chaque groupe est associée une *sous-polycellule* (le schéma représente leur graphe).

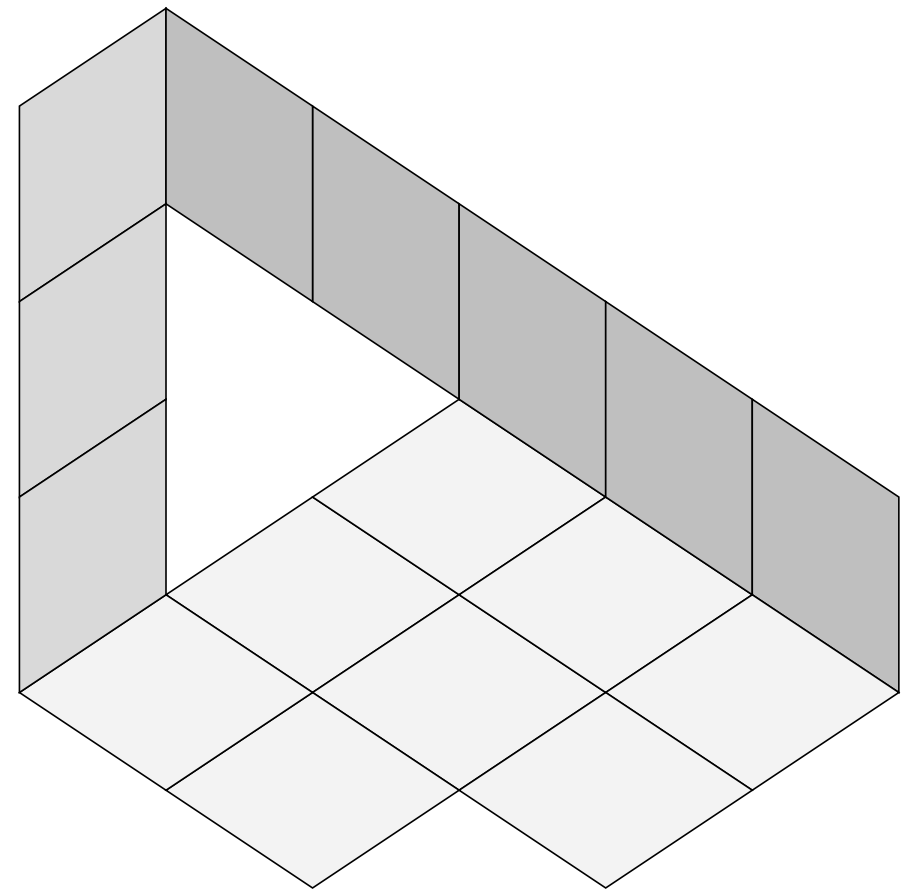
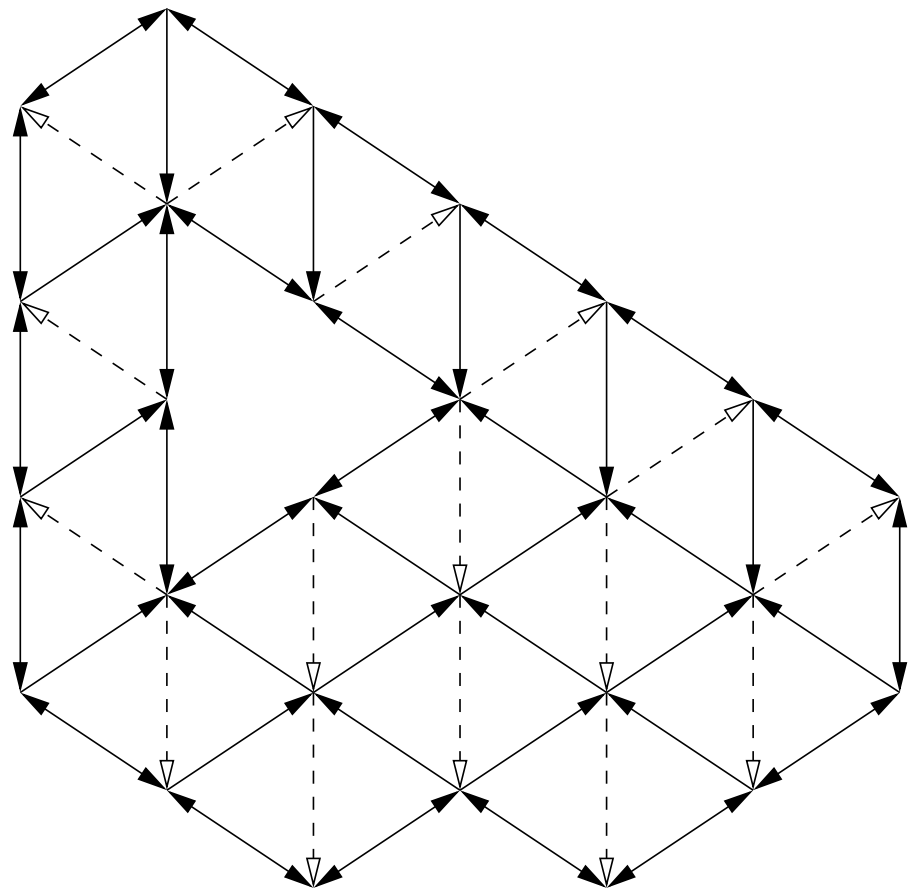


Tout pavage (ici le pavage minimal) induit un pavage sur chacun de ces groupes.

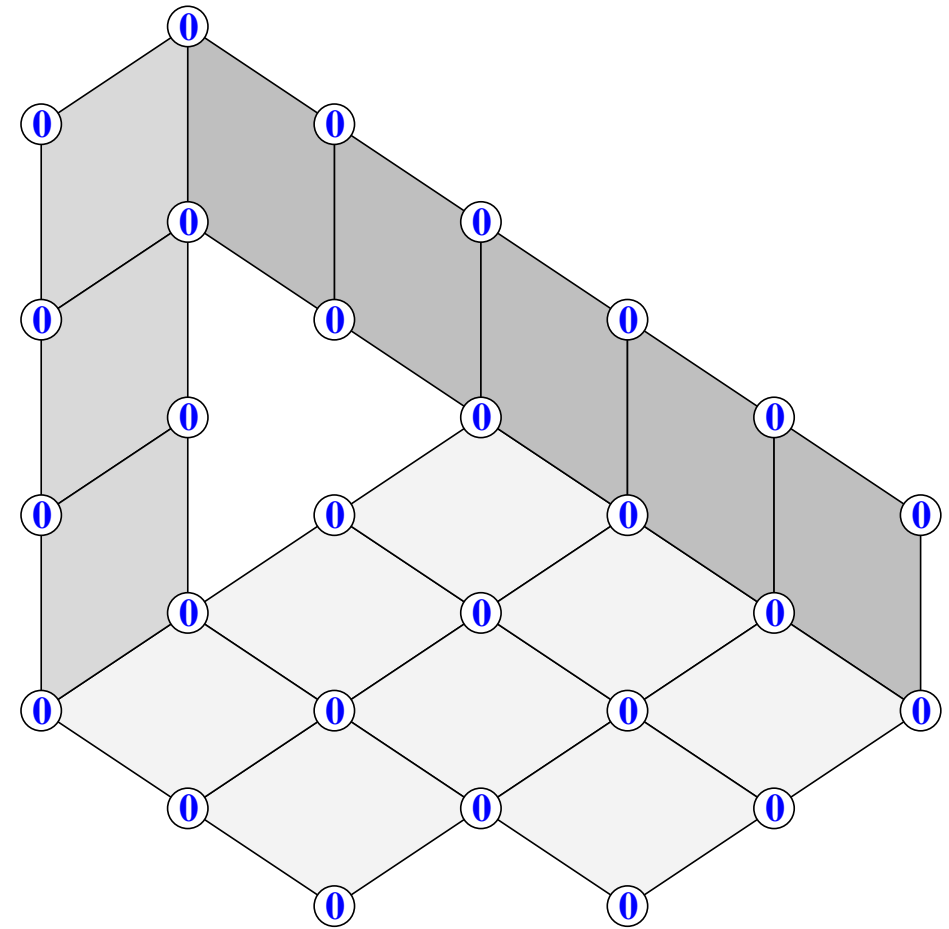
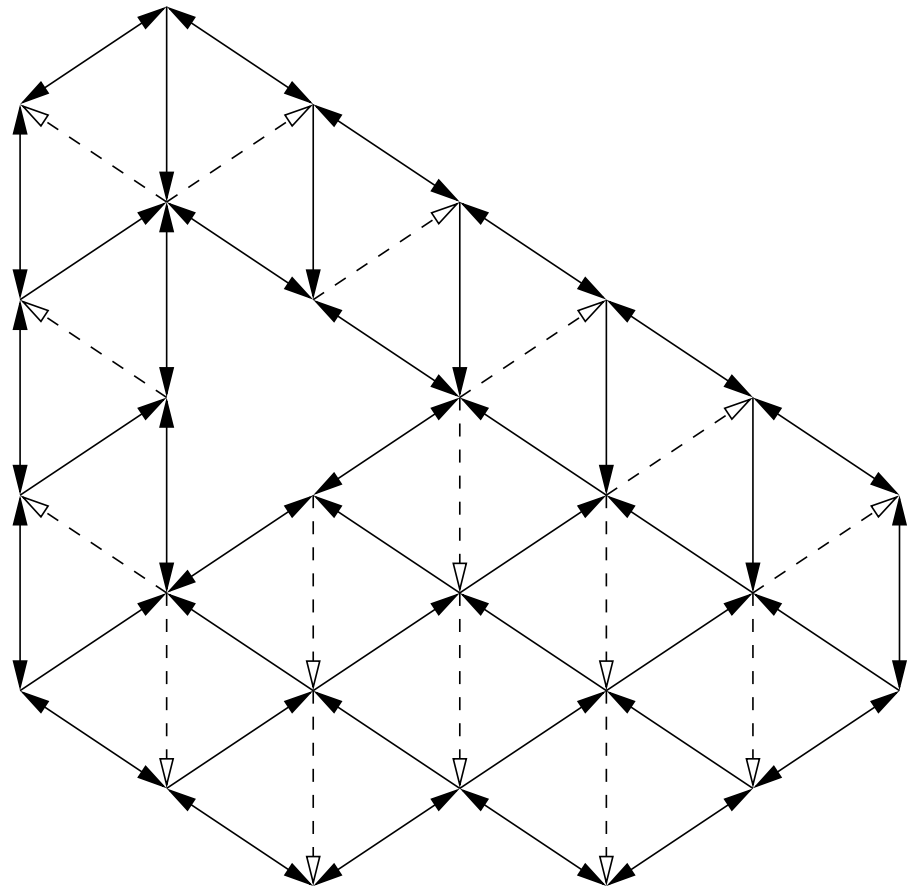
Flips et produit de treillis

Définition 7 (Flip)

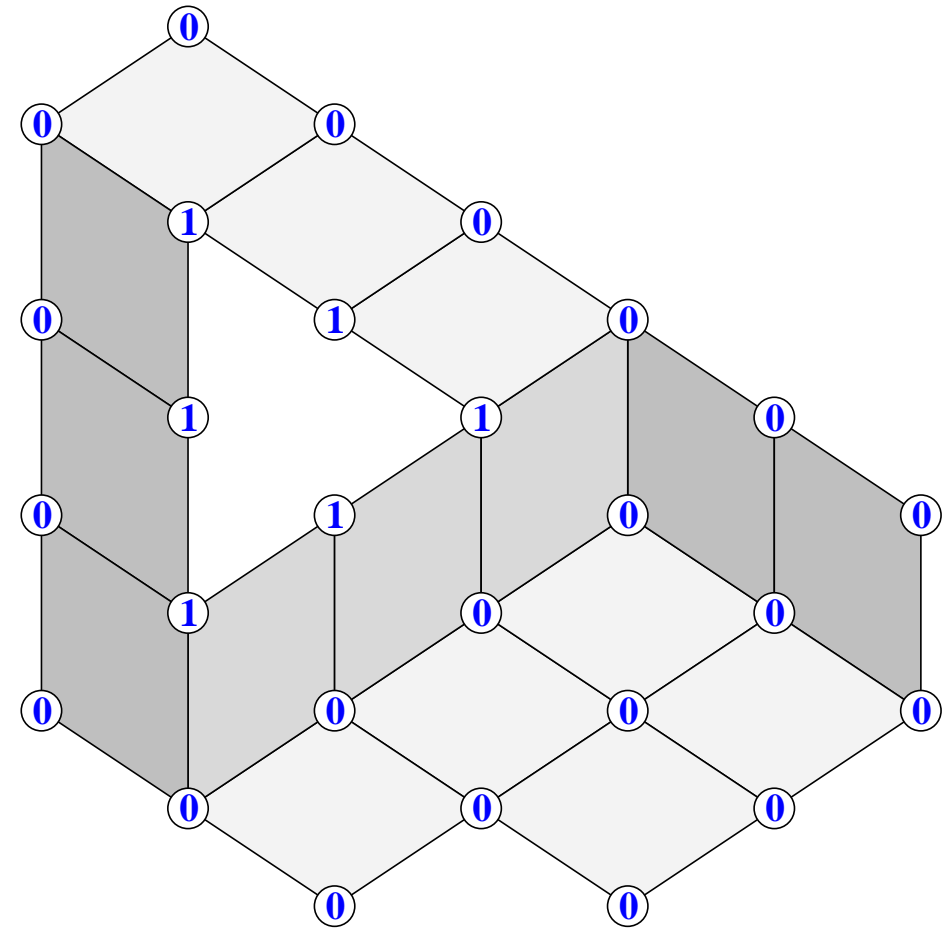
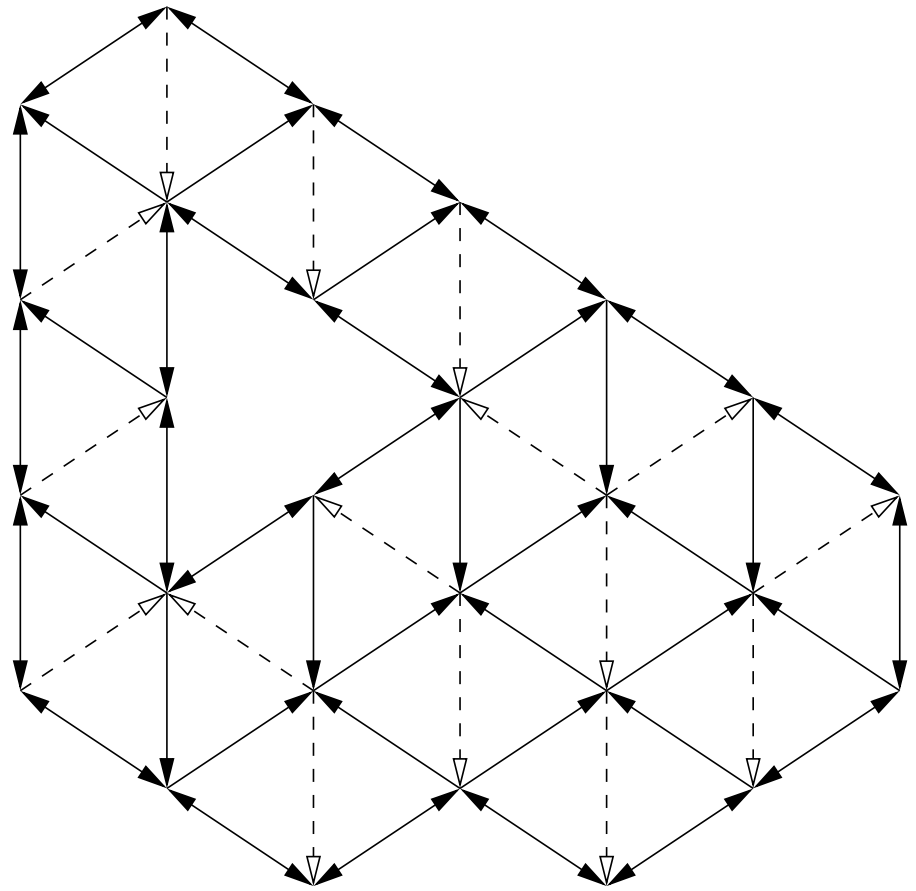
Si toutes les arêtes arrivant sur un nodule $A \neq A^$ sont valuées à 1 par δ et toutes celles en partant à 0, on fait un flip descendant sur A en échangeant ces valeurs. Le flip ascendant est l'opération inverse.*



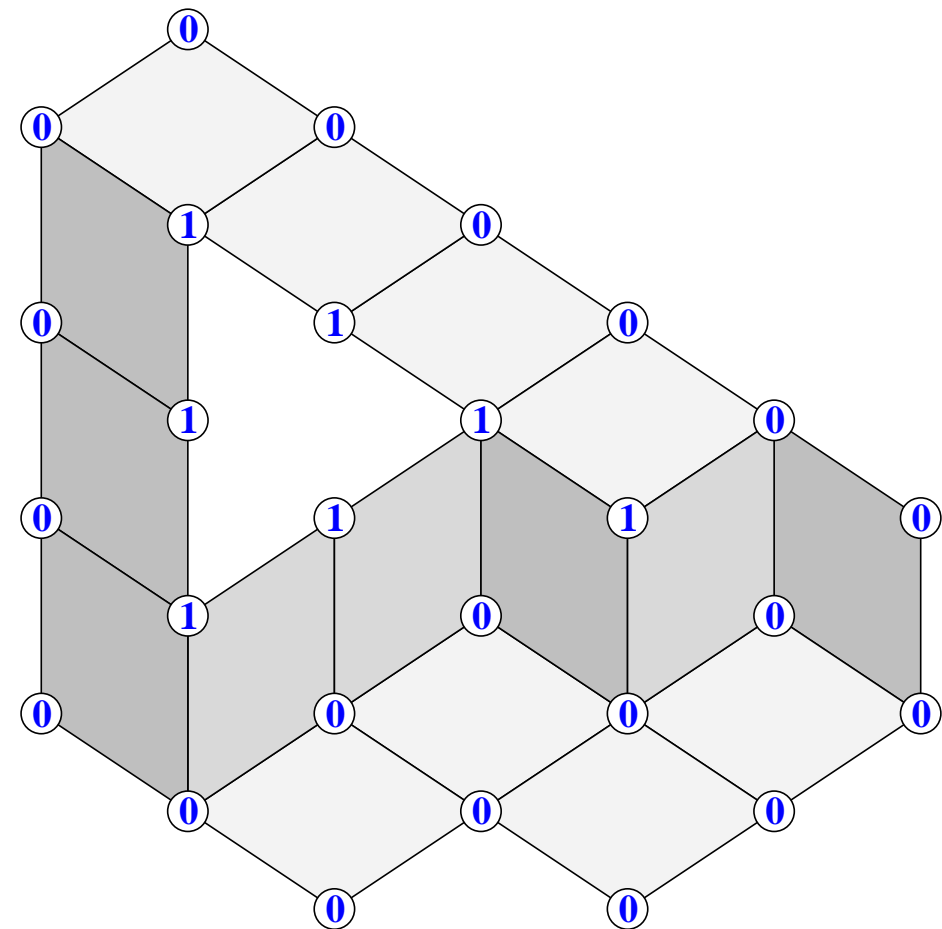
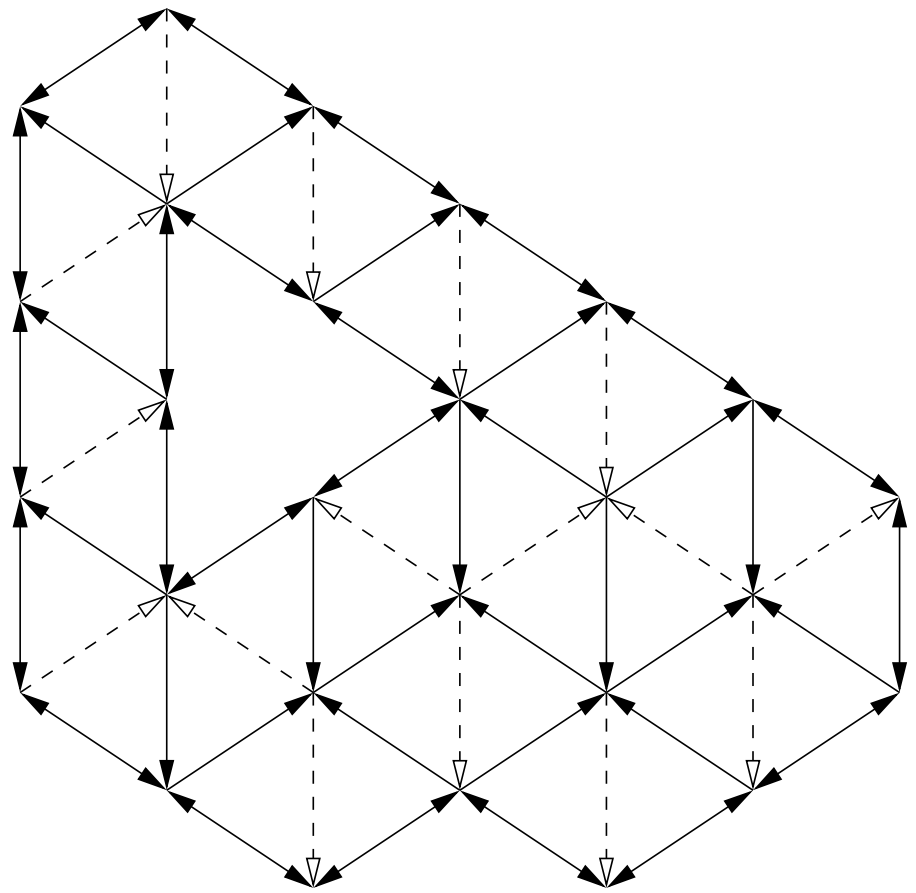
Considérons le pavage induit par le pavage minimal sur une des sous-polycellules.
 (À gauche : vision "polycellule" ; à droite : vision "tuiles").



Le potentiel du compteur binaire associé est alors nul (compteur minimal).



Un flip ascendant sur un nodule incrémente de 1 les potentiels de tous les sommets du nodule.



On retrouve la définition classique du flip quand le nodule est réduit à un sommet.

Définition 8 (Treillis (distributif))

Le triplet $(\mathcal{L}, \wedge, \vee)$ est un treillis si \mathcal{L} est un ensemble non vide, \wedge et \vee deux opérations binaires sur \mathcal{L} , toutes deux idempotentes, commutatives et associatives, et qui vérifient la loi d'absorption :

$$x \wedge (x \vee y) = x \vee (x \wedge y) = x.$$

Le treillis est distributif si, de plus, les égalités suivantes sont vérifiées :

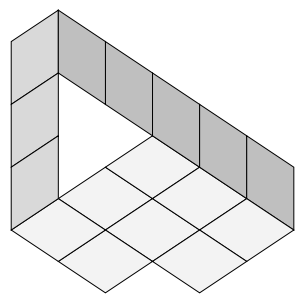
$$\begin{aligned}x \wedge (y \vee z) &= (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \\x \vee (y \wedge z) &= (x \vee y) \wedge (x \vee z).\end{aligned}$$

Définition 9

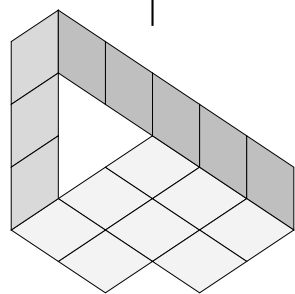
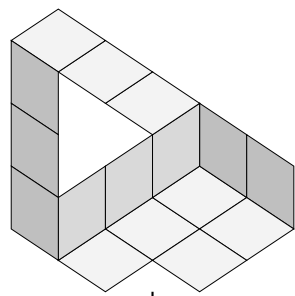
Soient δ et δ' deux compteurs binaires. On note $\delta \wedge \delta'$ (resp. $\delta \vee \delta'$) le compteur binaire de potentiel $\max(h_\delta, h_{\delta'})$ (resp. $\min(h_\delta, h_{\delta'})$).

Ces deux opérations définissent une structure de treillis distributif sur l'ensemble des compteurs binaires d'une polycellule, fortement liée à la notion de flip.

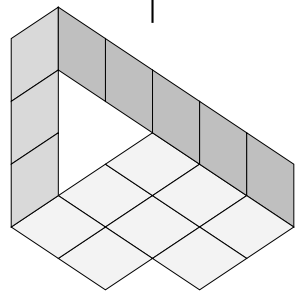
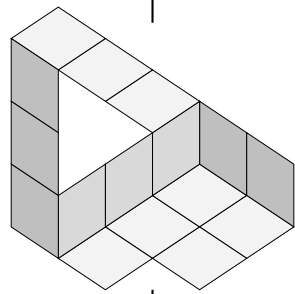
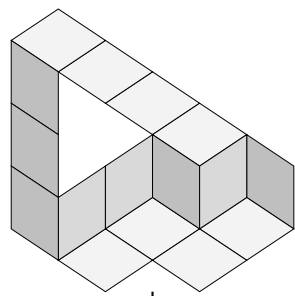
On a notamment la connexité par flips (et une borne sur le nombre de flips nécessaires).



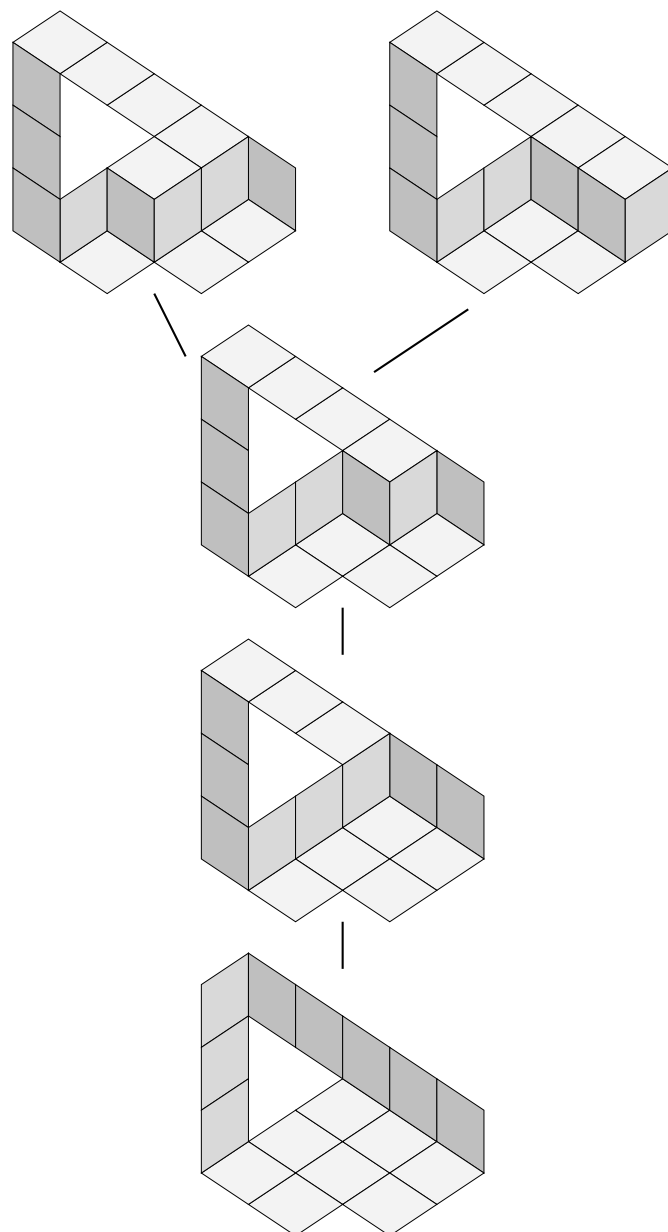
Pavage minimal



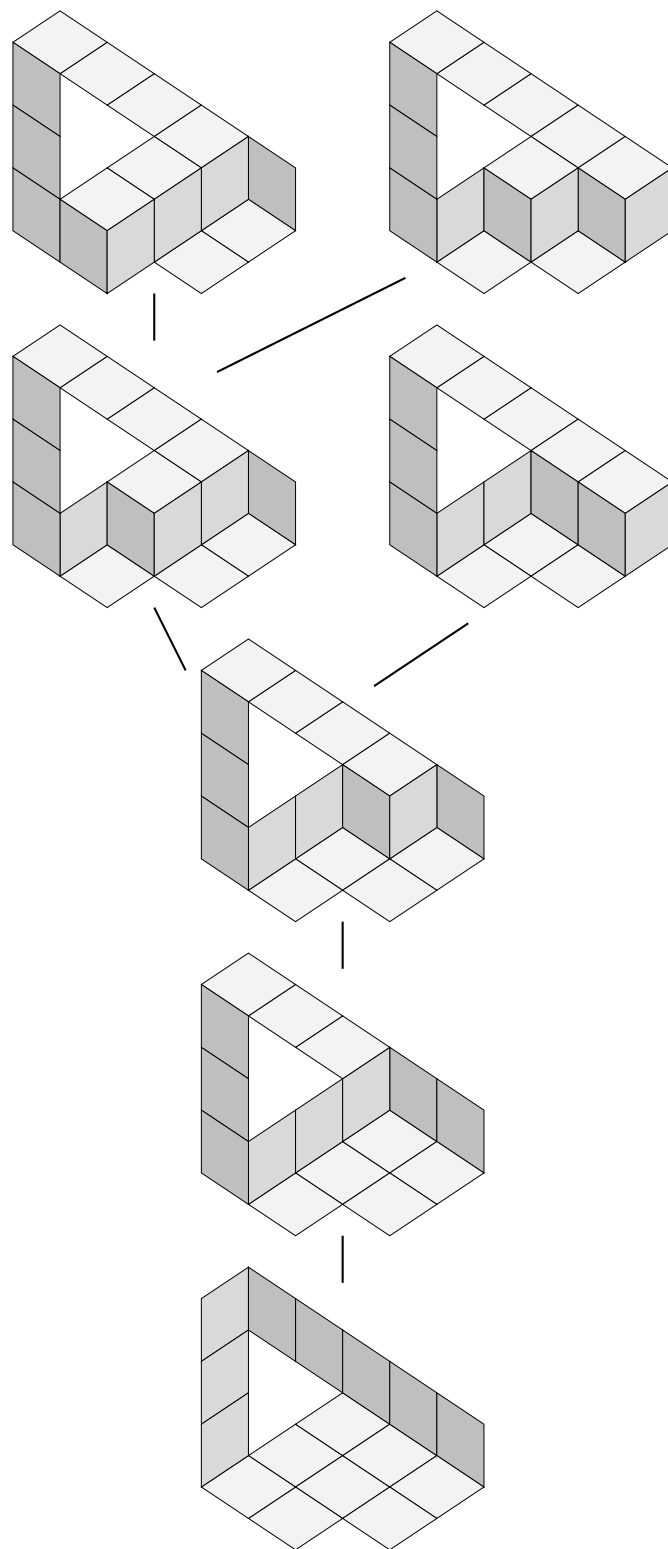
Un seul flip ascendant possible



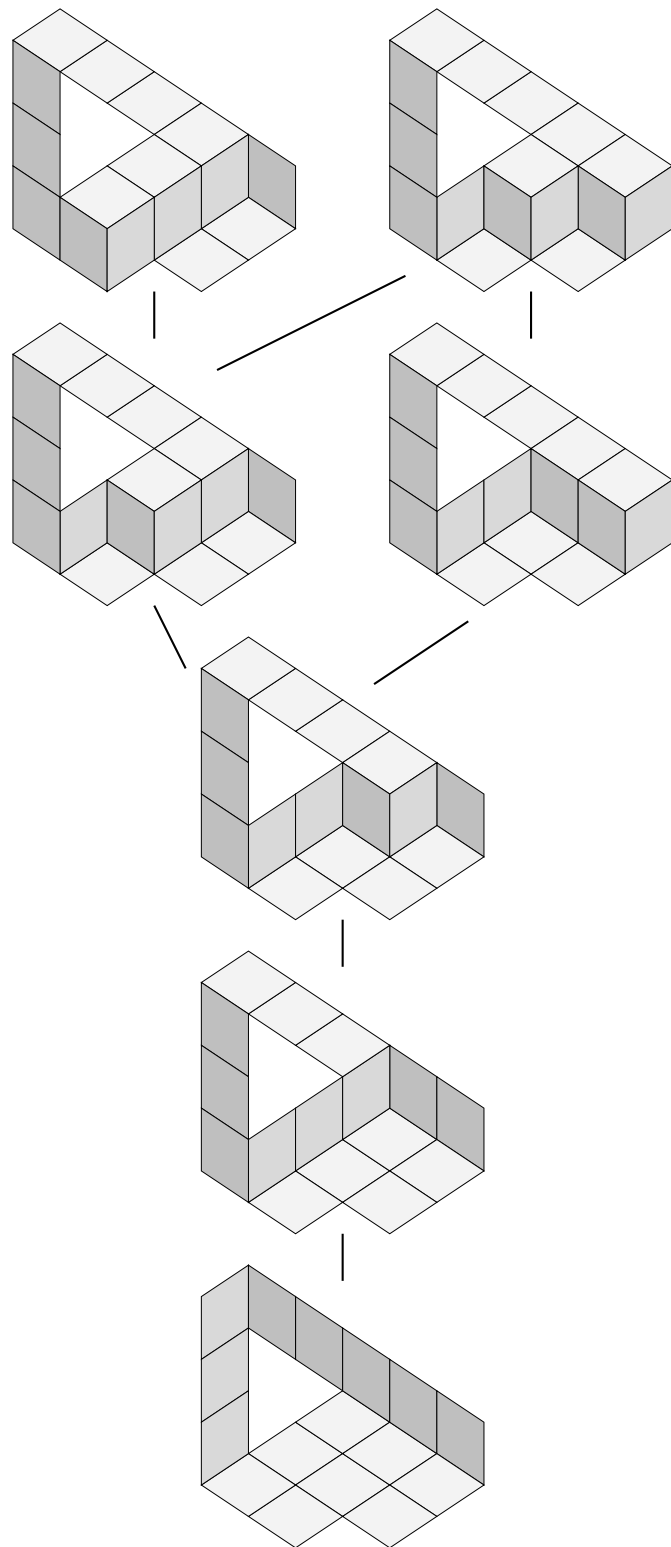
idem



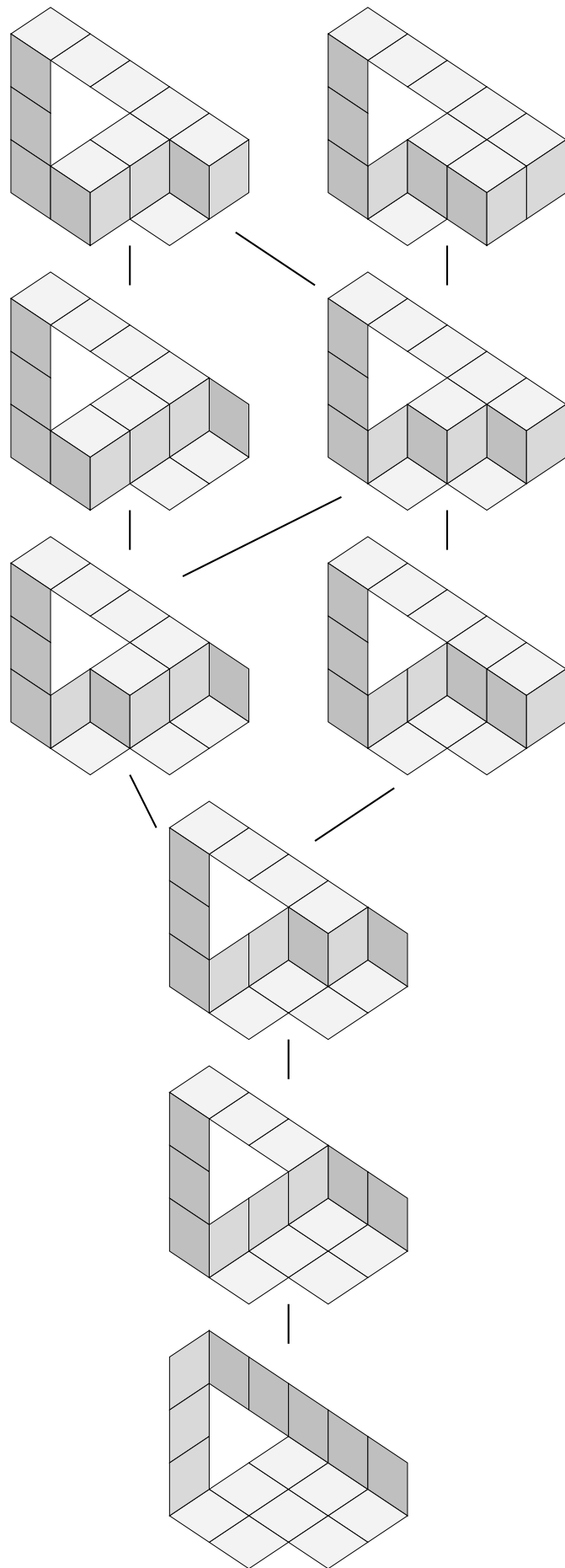
Deux flips ascendants possibles



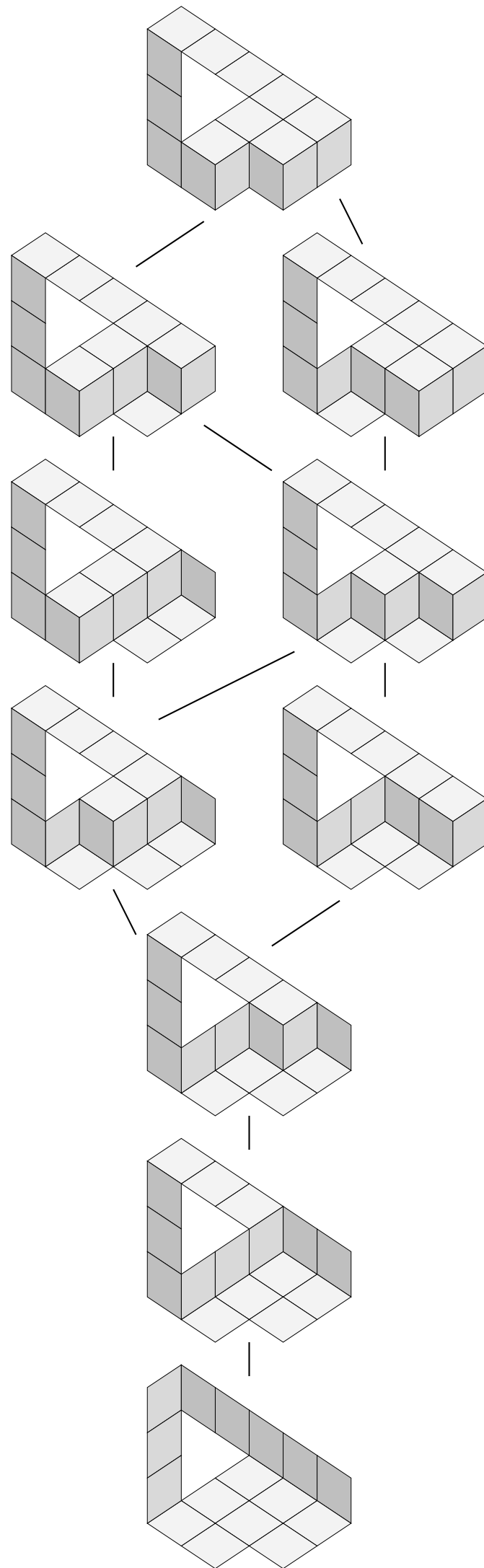
À gauche, encore deux flips ascendants possibles



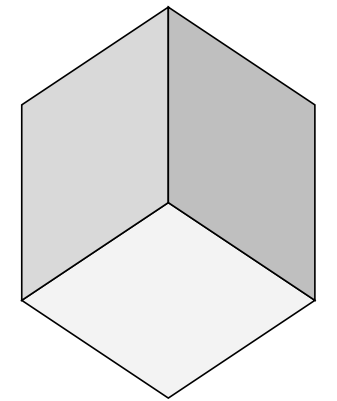
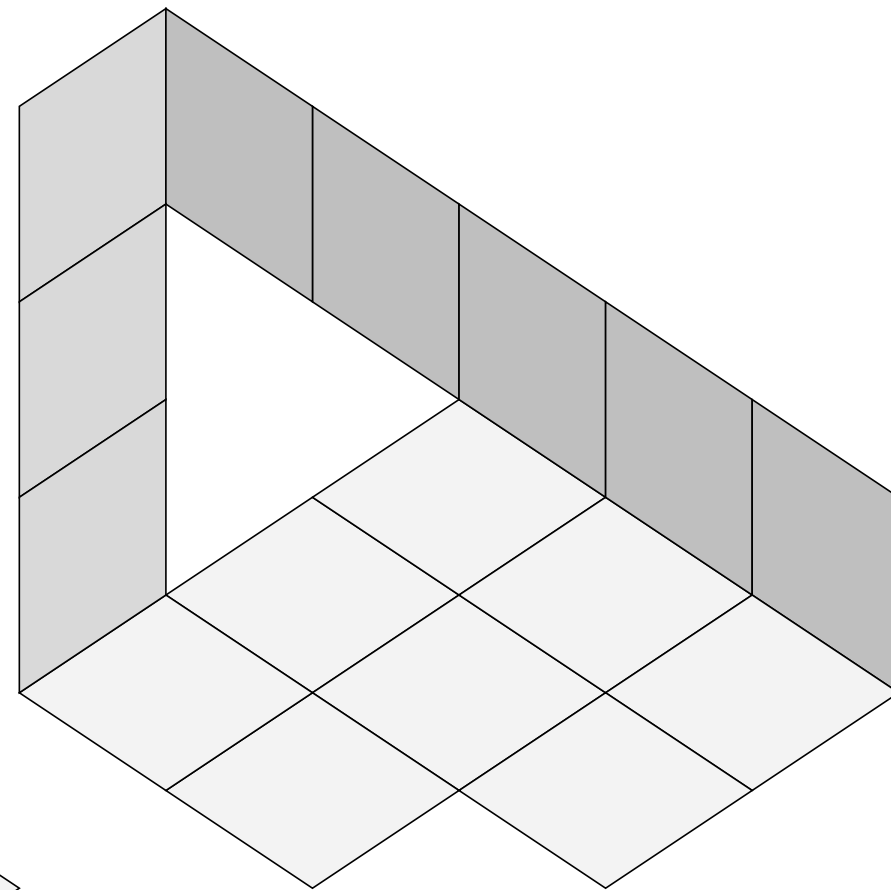
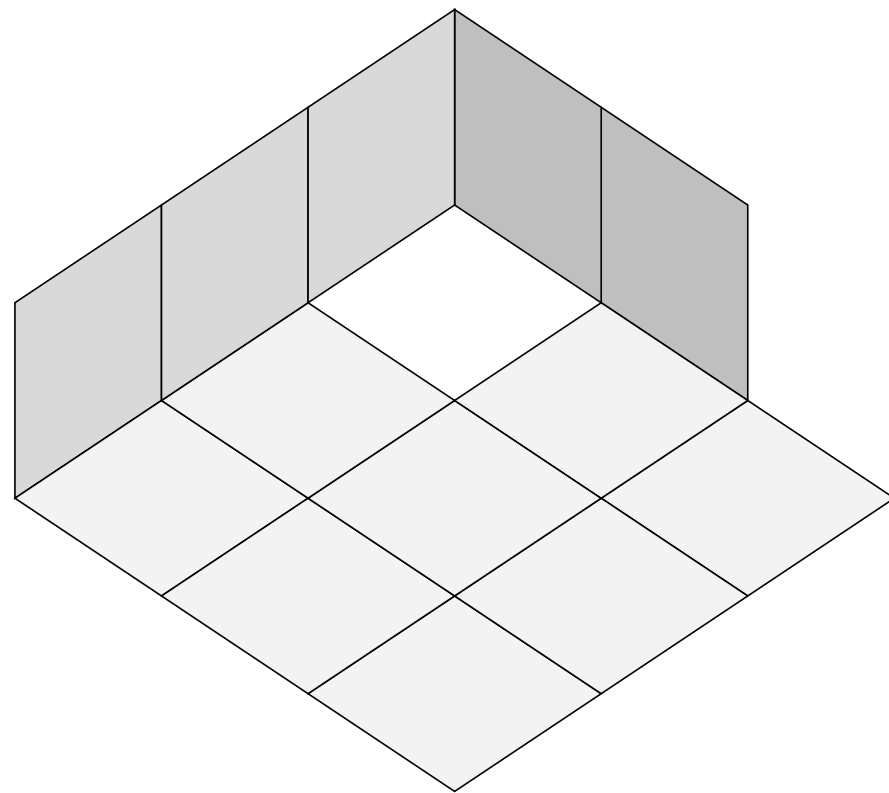
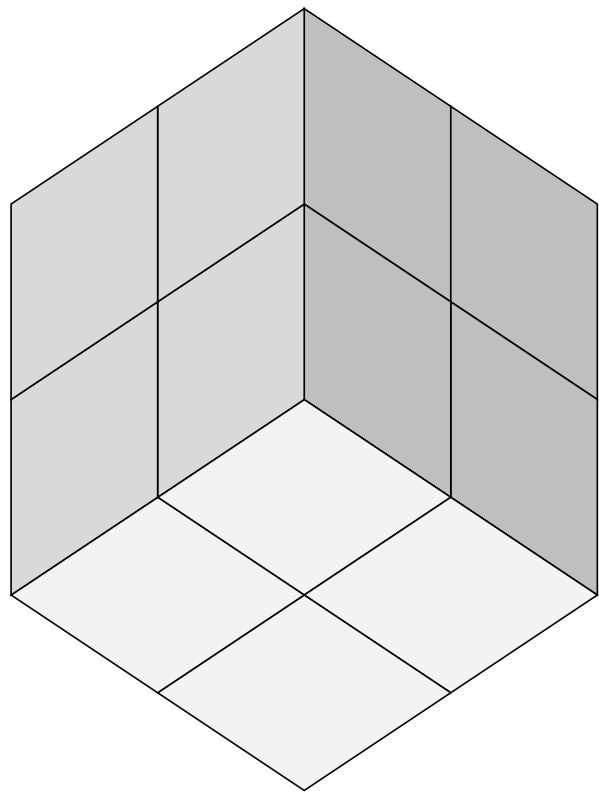
À droite, un seul, qui conduit à un pavage déjà obtenu



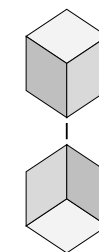
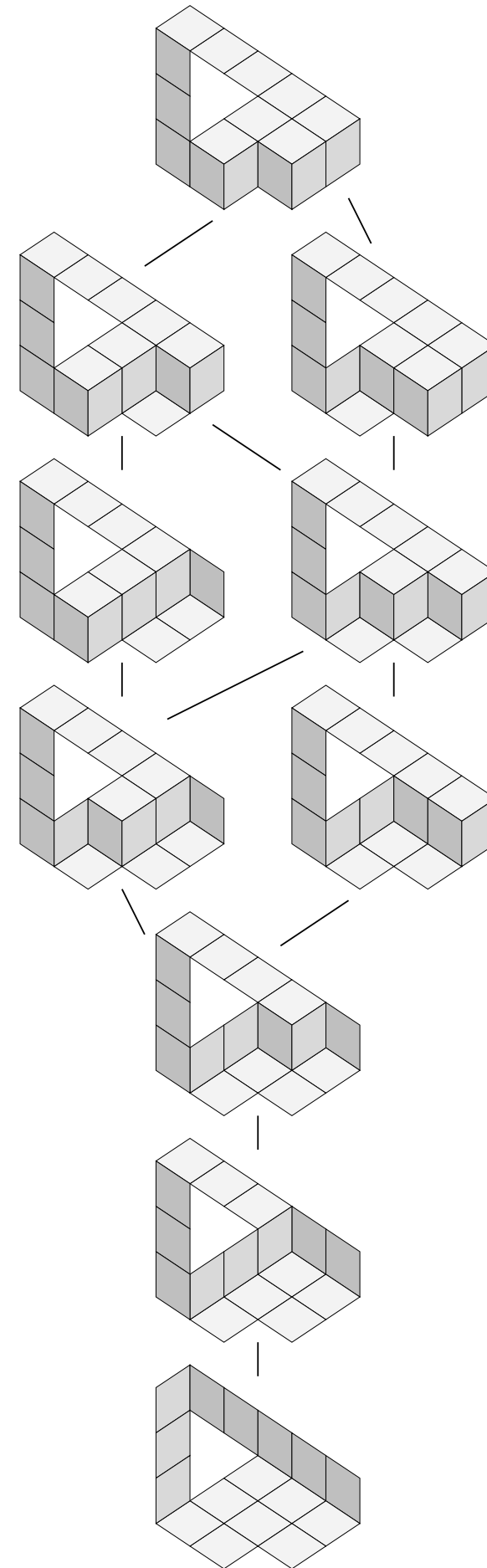
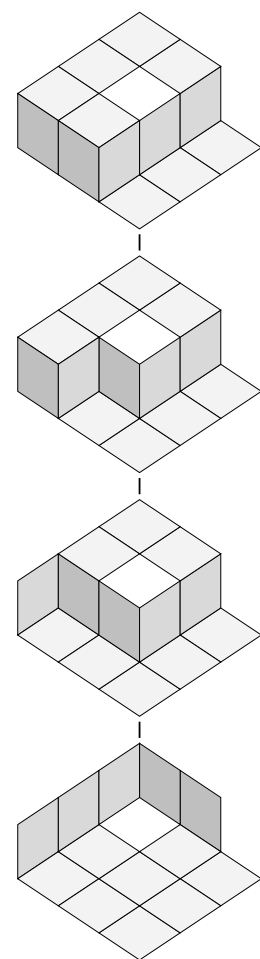
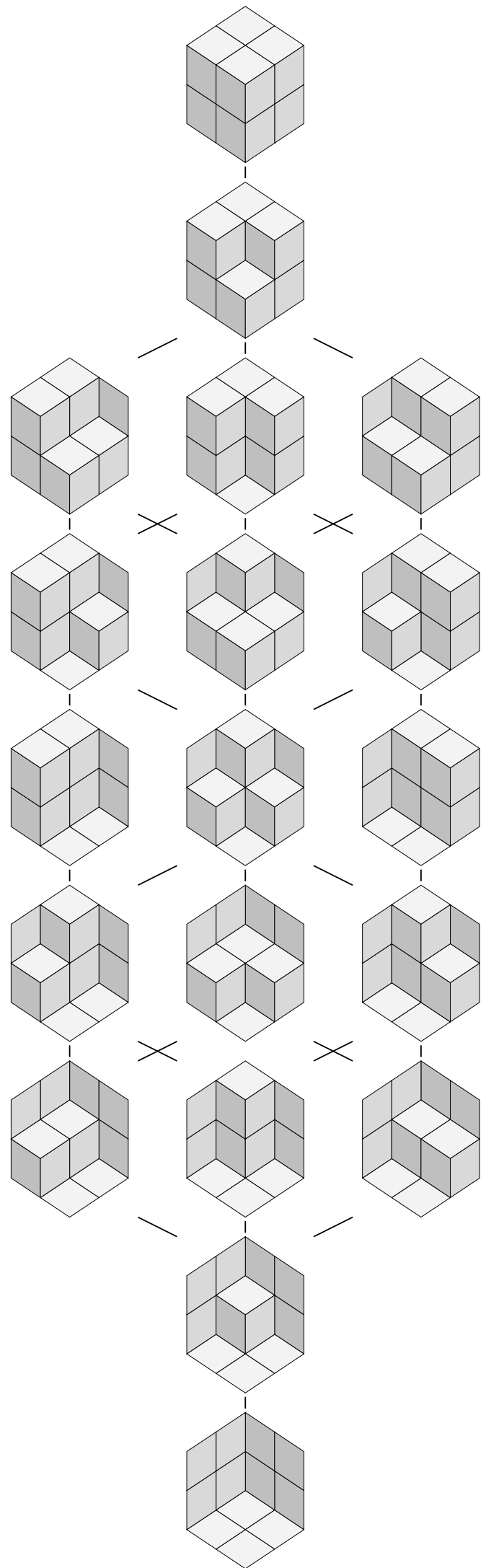
Ici, la situation est symétrique



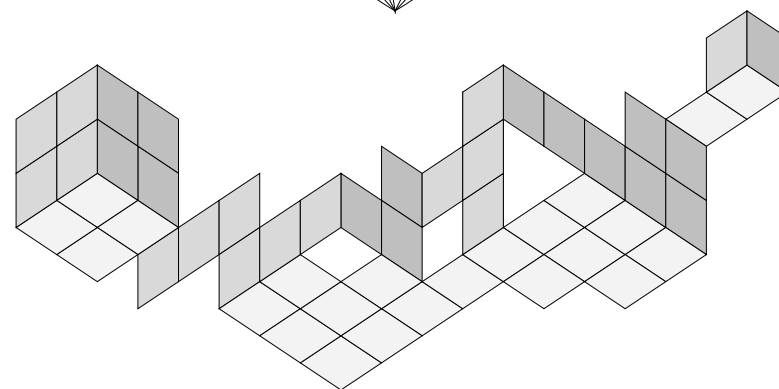
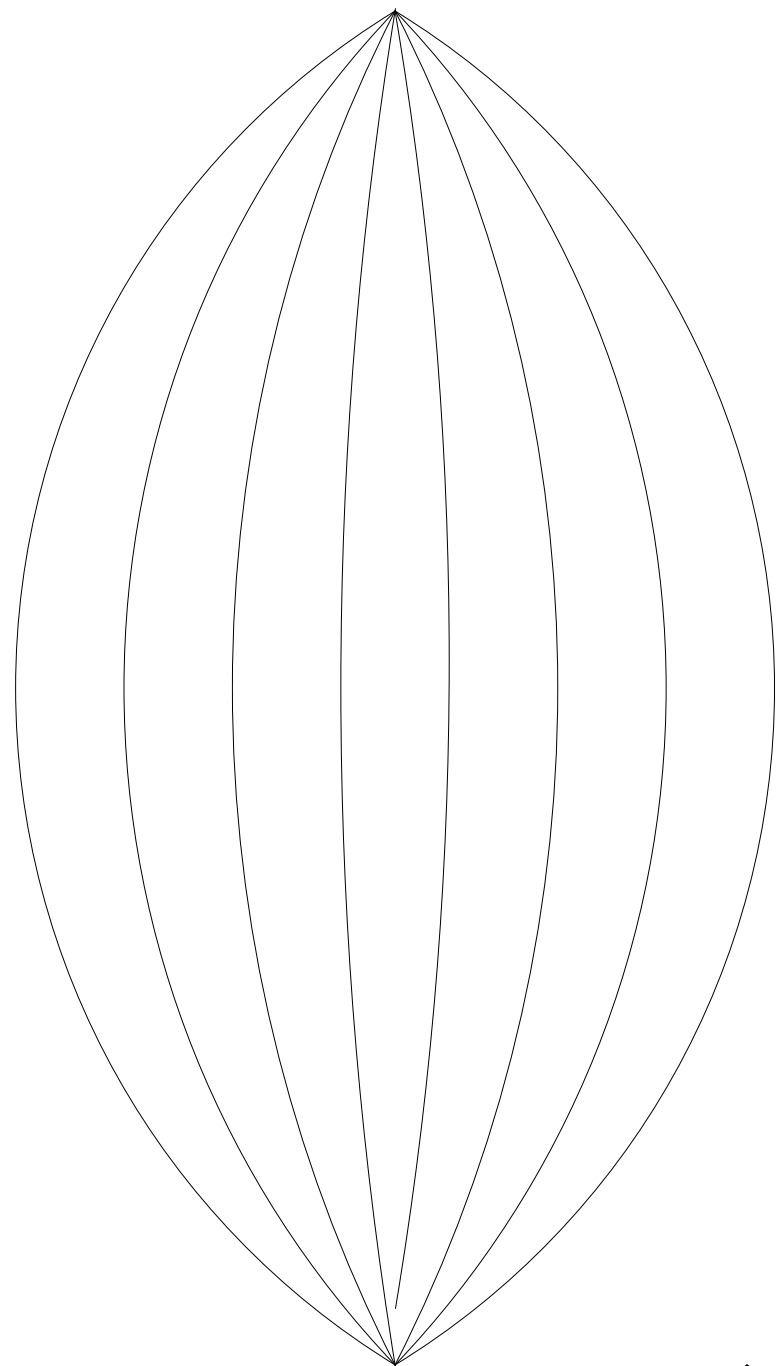
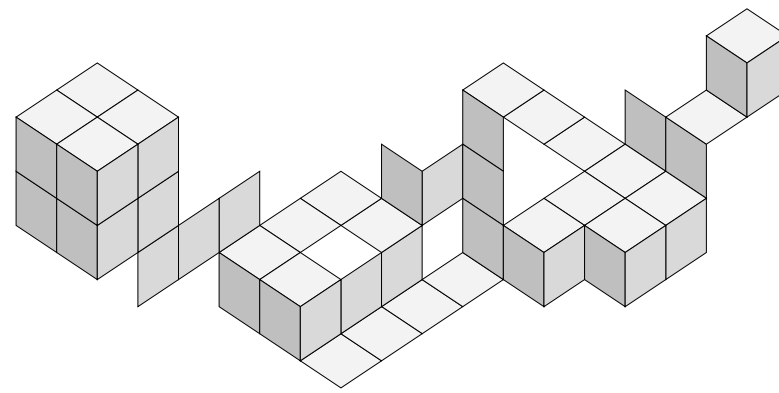
Le treillis final



On peut appliquer ceci à chacune des sous-polycellules de la décomposition.

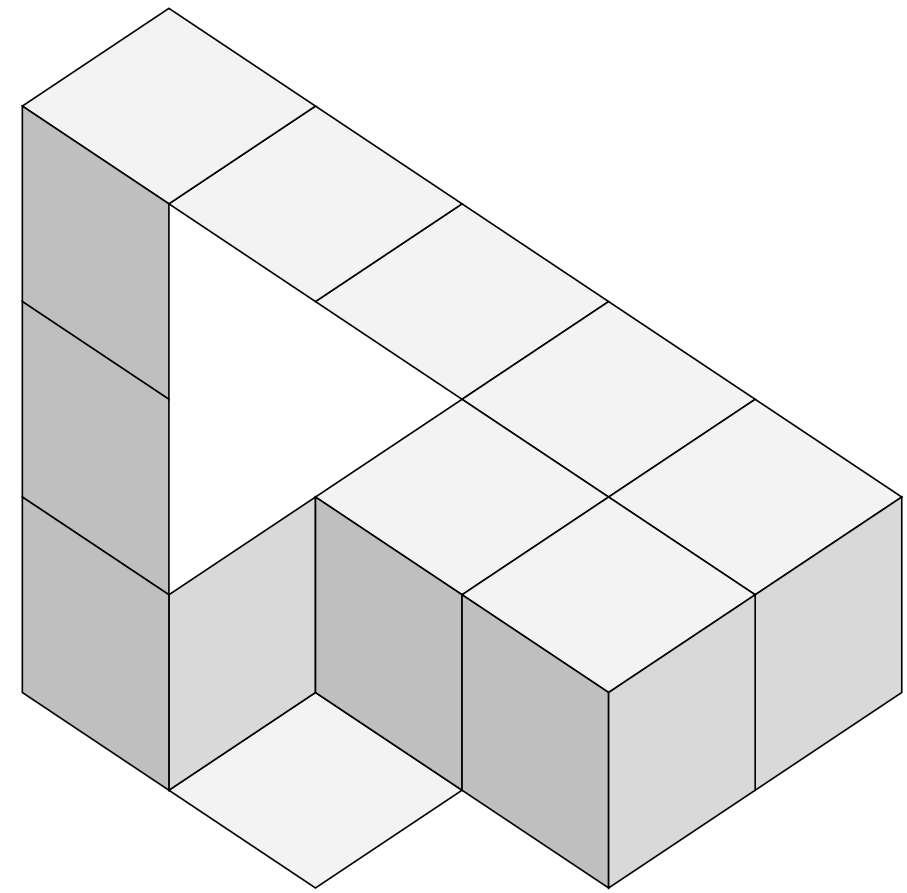


Les treillis de chaque sous-polycellule.

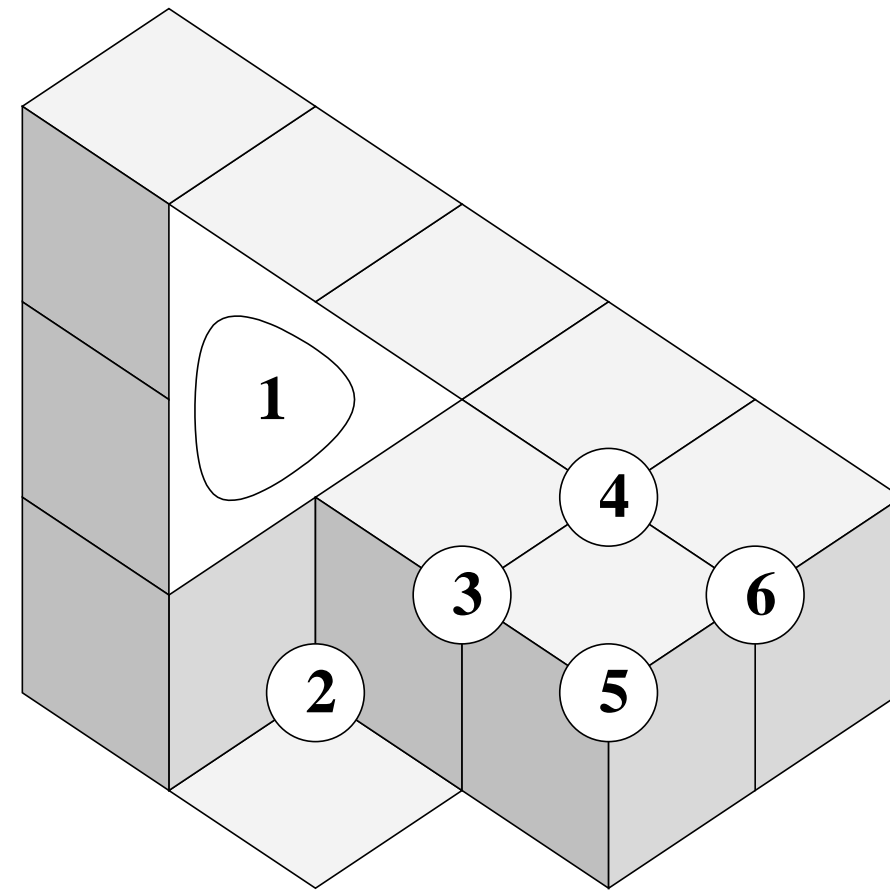


Le produit des treillis précédents donne le treillis de la polycellule entière.

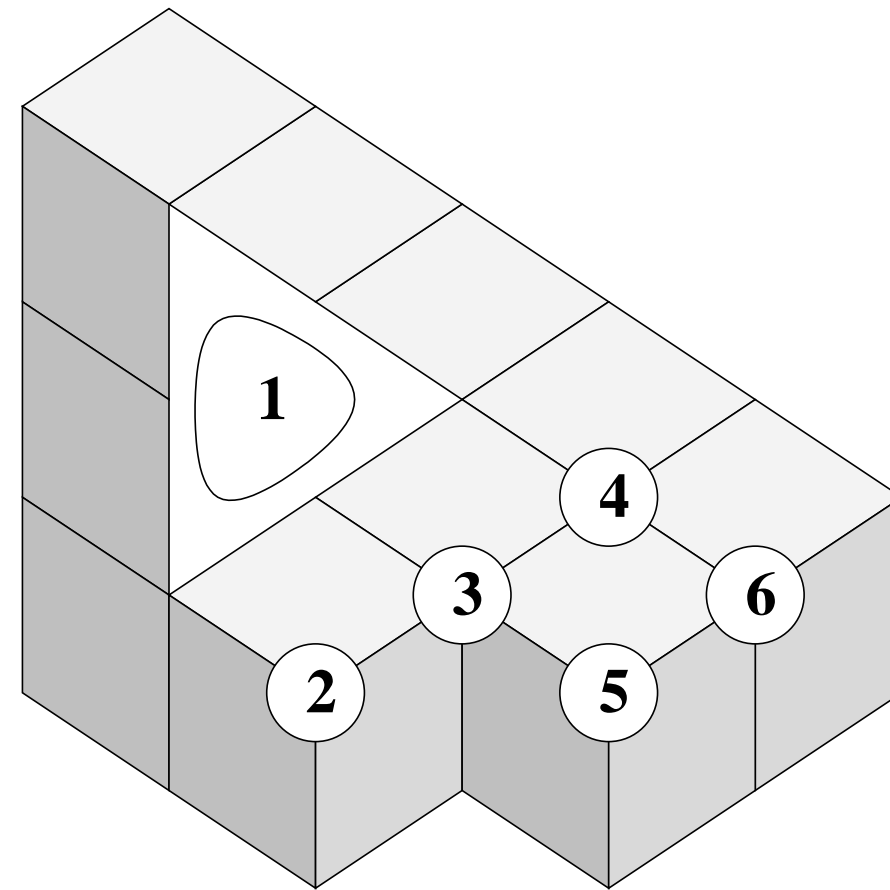
Énumération des pavages



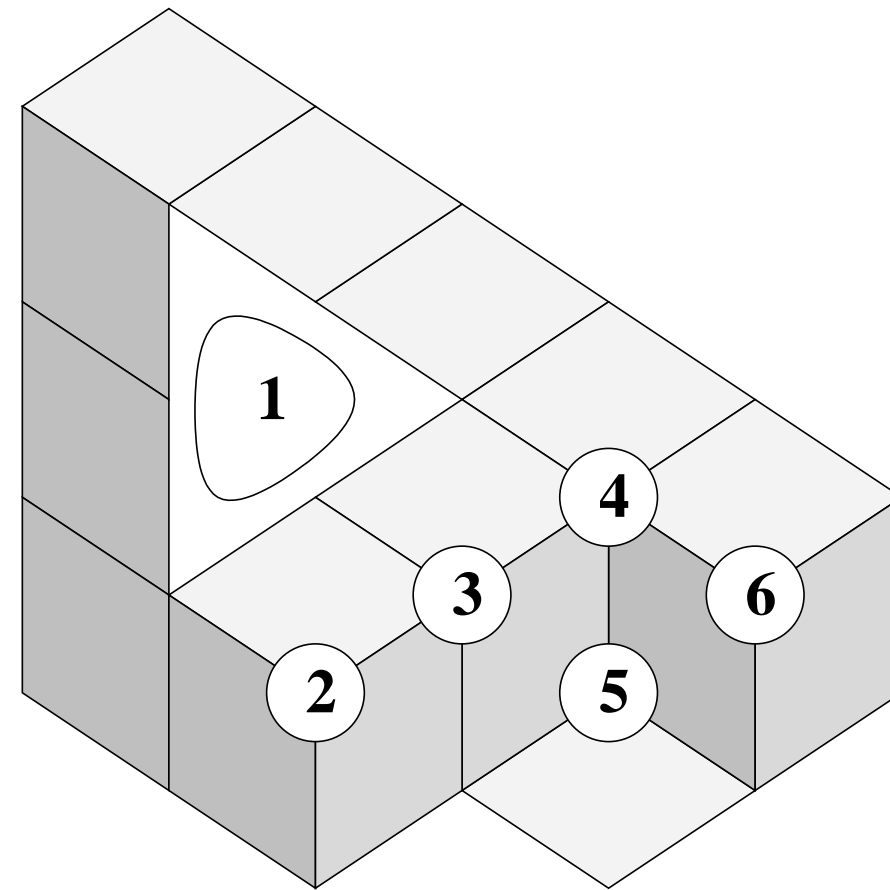
Considérons le pavage ci-dessus.



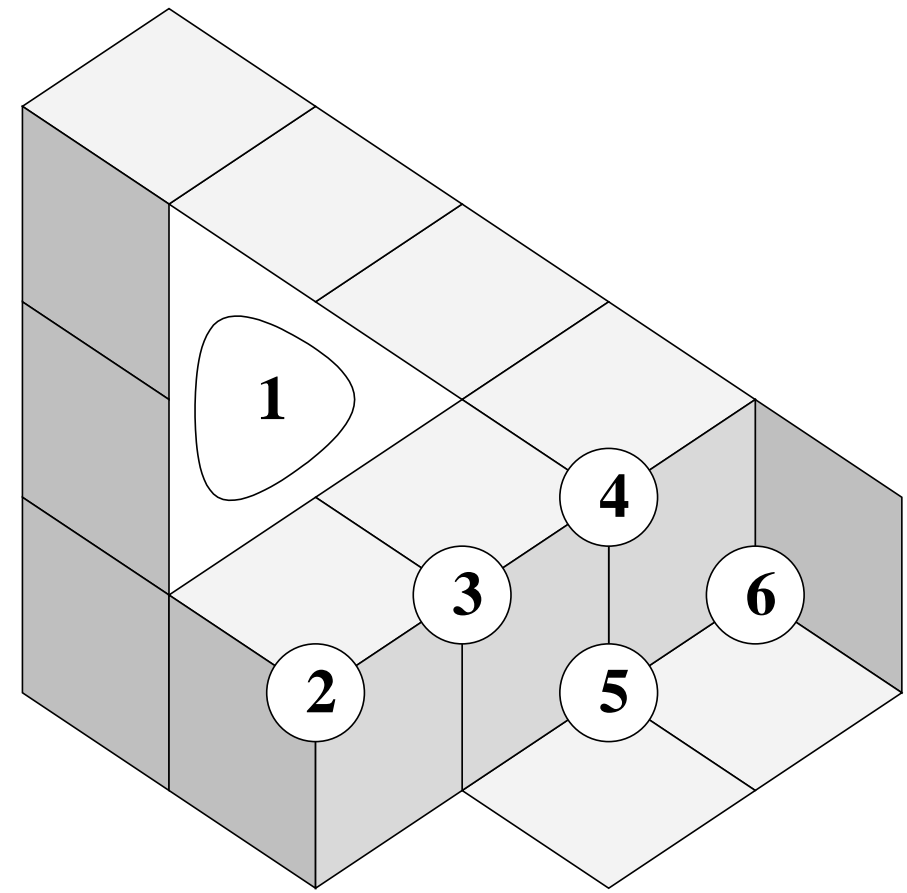
On indice arbitrairement les nodules de la polycellule associée (déjà étudiée).



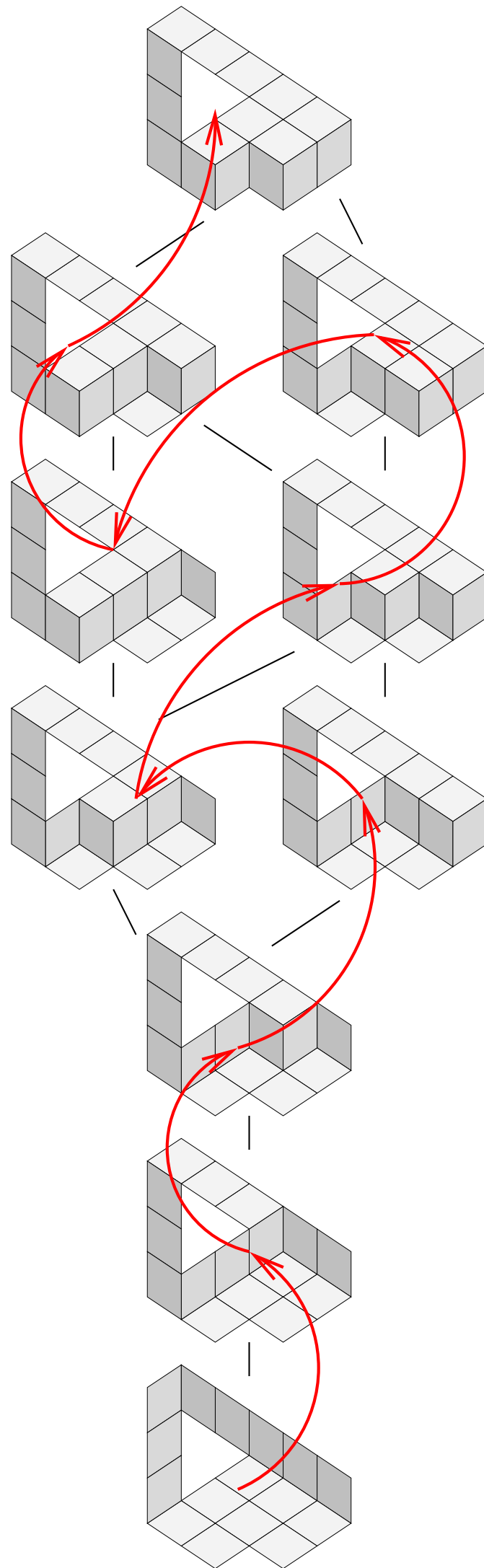
Le successeur s'obtient par un flip ascendant sur le nodule d'indice maximal tel que ce soit possible. . .



puis en faisant tous les flips descendants sur les nodules d'indices supérieurs : le 5...



puis le 6.



Ordre d'énumération avec l'indicage précédent.