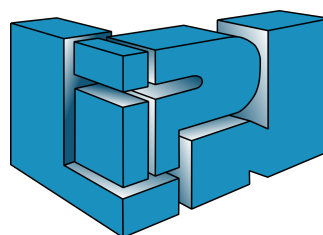


Recherche d'un pavage substitutif, obtenu par  
coupe-et-projection et invariant par rotation d'angle  $\frac{2\pi}{7}$

Victor LUTFALLA  
sous la direction de Thomas FERNIQUE  
LIPN

Février à Juin 2017



# Introduction

## Cadre

Ce stage s'est déroulé dans l'équipe CALIN du LABORATOIRE D'INFORMATIQUE DE PARIS NORD à l'université Paris 13 .

J'y ai travaillé sous la supervision de Thomas FERNIQUE et avec l'aide ponctuelle de Nicolas BEDARIDE et Thierry MONTEIL.

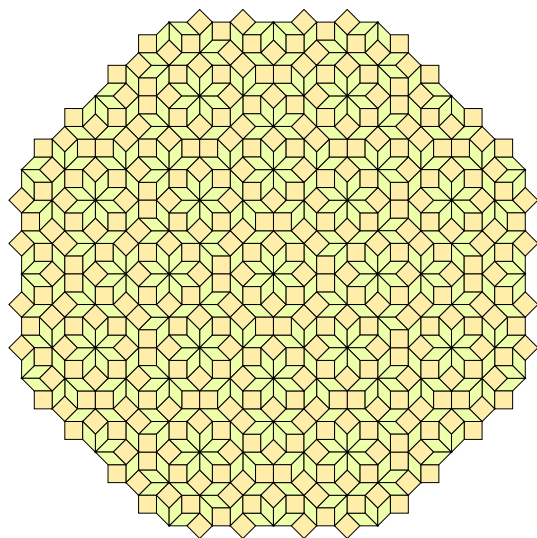
Je tiens à remercier Michaël RAO pour m'avoir aidé à trouver ce stage, Thomas FERNIQUE pour m'avoir encadré et fourni de précieux conseils, Nicolas BEDARIDE et Thierry MONTEIL pour leur aide ainsi que Frédérique BASSINO, l'équipe CALIN et l'ensemble du LIPN pour leur accueil.

## Contexte scientifique et objectif du stage

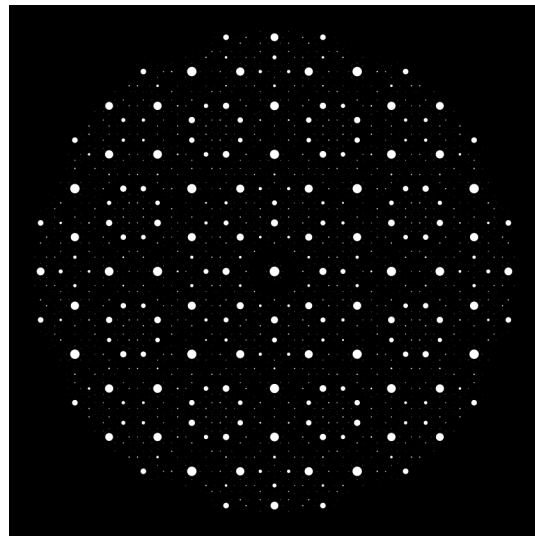
La notion d'ordre et de désordre, ou de complexité et de simplicité, est au cœur des sciences exactes comme expérimentales. Durant ce stage j'ai étudié ces notions sur les pavages.

Un pavage est un recouvrement exact, aussi appelé sans chevauchement, d'une partie de l'espace ou du plan par des tuiles [figure 1a]. Les exemples les plus classiques sont les mosaïques et les puzzles pour les pavages du plan.

Dans le cas général on étudie les pavages finis ou infinis de l'espace en n'importe quelle dimension, les tuiles sont des ensembles connexes et compacts de l'espace et il y a un nombre fini de tuiles (à translation près).



(a) Un motif central du pavage



(b) La figure de diffraction associée au pavage

FIGURE 1 – Un pavage de AMMANN-BEENKER [1]

Les pavages les plus simples sont les pavages périodiques, c'est à dire qu'ils admettent un ou deux vecteurs de translation qui laissent le plan invariant. Cependant il existe d'autres propriétés de régularité sur les pavages, par exemple la récurrence uniforme : un pavage récurrent uniforme est un pavage, tel que pour tout motif (sous-partie du pavage) fini  $m$  qui apparaît, il existe un rayon fini  $r$  tel que pour tout sommet  $v$  du pavage,  $m$  apparaît dans la boule de rayon  $r$  centrée en  $v$ . On remarque aisément que les pavages périodiques sont récurrents uniformes, mais il existe des pavages apériodiques récurrents

uniformes tout de même. Ces pavages, sont appelés *quasipériodiques* et consistent un domaine d'étude foisonnant et passionnant depuis les travaux de PENROSE.

Une façon de générer des pavages quasipériodiques est d'utiliser une *substitution* qui fait grandir une figure initiale. Cette technique est intéressante car elle est par essence locale et équivalente à une définition par des *contraintes locales* [2,3] on peut donc observer la propagation de contraintes locales en des propriétés globales.

Cette classification périodique/quasipériodique/aléatoire se retrouve en physique des matériaux sous le nom de cristal (matière organisée de façon périodique), quasicristal (matière organisée mais pas de façon périodique) [1,4] et matière amorphe (disposition aléatoire).

Les quasicristaux sont caractérisés par des figures de diffractions régulières lorsqu'ils sont soumis à des faisceaux de rayons X [figure 1b] et une observation très intéressante est que les quasicristaux correspondent à des pavages quasipériodiques.

De plus, par leur nature physique, les quasicristaux correspondent à une classe spécifique de pavages quasipériodiques : les pavages par *coupe-et-projection* [1][section 2].

Certains pavages ont été caractérisés par substitution et par coupe-et-projection ce qui permet à la fois d'avoir une interprétation physique et des propriétés intéressantes, par exemple les pavages de AMMANN-BEENKER [figure 1a] et de PENROSE. Et réciproquement en partant de quasicristaux connus, des pavages quasipériodiques avec les mêmes symétries ont été trouvés [5,6].

Cependant certaines symétries et invariances par rotation n'ont pas été traitées, par exemple la symétrie du *7-fold* [section 2]. Le but de mon stage est de traiter cette classe de symétrie c'est à dire de trouver un pavage par *coupe-et-projection* qui soit *substitutif* avec une symétrie de *7-fold* [1,7] donc en particulier une invariance par rotation d'angle  $\frac{2\pi}{7}$ .

Dans les sections 1 et 2 je détaille les techniques de pavage par substitution et coupe-et-projection, dans la section 3 je présente le pavage substitutif proposé par Jarkko KARI et mon travail de recherche qui a prouvé qu'il n'était pas de coupe-et-projection, dans la section 4 je présente ma tentative infructueuse basée sur le travail de Edmund HARRISS et dans la section 5 je présente un pavage qui a les propriétés souhaitées : substitutif, par coupe-et-projection et invariant par rotation d'angle  $\frac{2\pi}{7}$ .

## Table des matières

<b>1 Pavages par Substitution</b>	<b>4</b>
1.1 Sur les mots . . . . .	4
1.2 Cas des pavages du plan . . . . .	4
<b>2 Ensembles définis par Coupe et Projection</b>	<b>7</b>
2.1 Le cas $2 \rightarrow 1$ . . . . .	7
2.2 Cas $n \rightarrow 2$ . . . . .	8
2.3 Le 7-fold . . . . .	9
<b>3 Étude du pavage proposé par Jarkko Kari</b>	<b>10</b>
3.1 Présentation du pavage . . . . .	10
3.2 Étude du pavage pour une coupe-et-projection . . . . .	10
<b>4 Pavages et matrices de substitution de Harriss</b>	<b>12</b>
4.1 Présentation de la technique de HARRISS en dimension 5 . . . . .	12
4.2 Critère de Pavabilité de KENYON . . . . .	13
4.3 Projection sur $\Delta$ . . . . .	14

## 1 Pavages par Substitution

La technique de substitution est basée sur deux choses : une figure initiale et une substitution. Par souci de simplicité je commence par définir les substitutions sur les mots et seulement ensuite je les définis sur les pavages.

### 1.1 Sur les mots

Une substitution sur les mots sur l'alphabet  $\Sigma$  est une fonction  $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma^*$  qui envoie chaque lettre de l'alphabet sur un mot. Cette fonction  $\sigma$  se généralise sur les mots avec  $\sigma(a_1 \cdots a_n) = \sigma(a_1) \cdots \sigma(a_n)$ .

Par exemple la substitution  $\sigma : \begin{cases} a \rightarrow ab \\ b \rightarrow a \end{cases}$  génère le mot de fibonacci

$$a \xrightarrow{\sigma} ab \xrightarrow{\sigma} aba \xrightarrow{\sigma} abaab \xrightarrow{\sigma} abaababa \dots$$

Il y a plusieurs notions possibles pour définir un mot limite généré par une substitution :

1. en partant d'un mot initial  $u$ , si la limite existe on peut définir le mot infini  $\omega_\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^n(u)$
2. on peut aussi définir l'ensemble des mots bi-infinis limite  $S_\sigma$  comme l'ensemble des mots bi-infinis sur  $\Sigma$  qui ont une suite infinie d'antécédents successifs par  $\sigma$

$$S_\sigma = \left\{ \omega \in \Sigma^{\mathbb{Z}}, \exists (\omega_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in (\Sigma^{\mathbb{Z}})^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, \omega_0 = \omega, \sigma(\omega_{n+1}) = \omega_n \right\}$$

### 1.2 Cas des pavages du plan

Un pavage du plan est un recouvrement du plan par un ensemble de tuiles [8] [figure 1a, 5], c'est à dire que l'union des tuiles est le plan en entier mais l'intérieur de l'intersection des tuiles est vide. Dans le cadre de ce stage les tuiles sont des losanges notés  $L_i$  issus, à translation et rotation près, d'un jeu de tuiles fini noté  $\mathcal{L}$ .

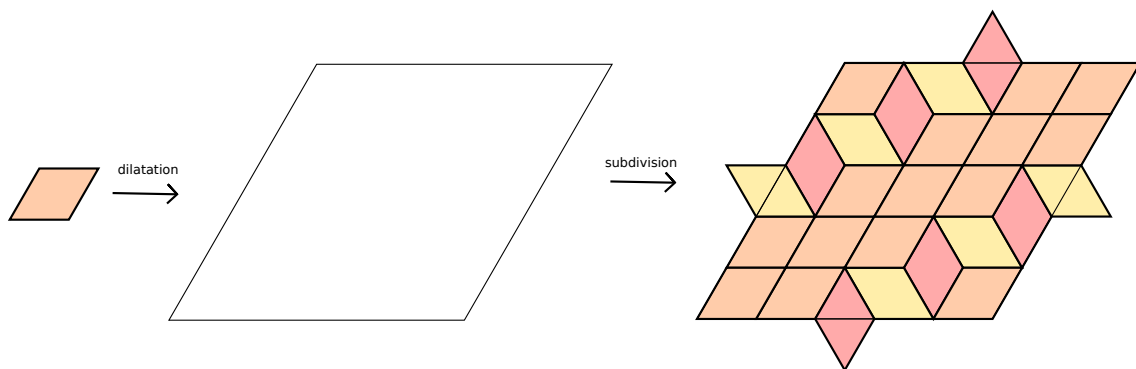


FIGURE 2 – Substitution pour un pavage simple

En revanche une complication du pavage par rapport aux mots est que la notion de concatenation se généralise assez mal. Pour palier ce problème nous avons adopté l'approche de la *substitution géométrique* : La substitution  $\sigma$  est la composée d'une dilatation  $\varphi$  et d'une subdivision  $\psi$  [figure ] .

1. Dilatation  $\varphi$  : la tuile est dilatée par un facteur  $S$  [figure 1.2]. La tuile ainsi obtenue est appelée *métatuile*
2. Subdivision  $\psi$  : la métatuile est ensuite subdivisée en tuiles issues du jeu initial [figure 1.2]. Il y a cependant une certaine liberté sur les arêtes : des tuiles peuvent chevaucher l'arête comme sur la figure 1.2.

Le seul détail, c'est que ça s'assemble bien entre les métatuiles voisines [figure 3]. La solution que l'on a adopté est que toutes les substitutions des métatuiles ont la même séquences  $s$  de tuiles sur les arêtes, avec  $s$  un palindrome.

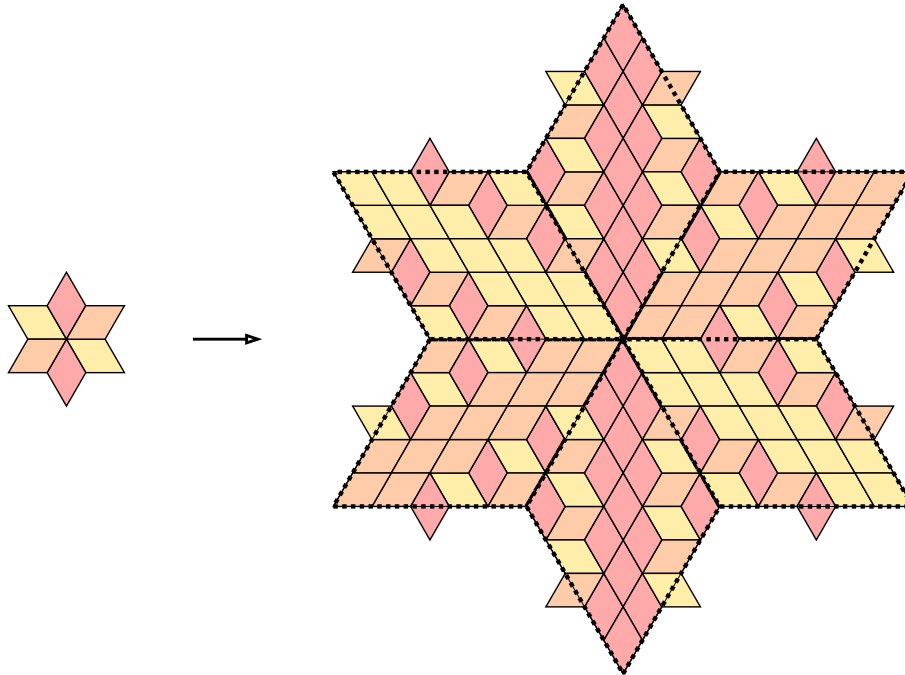


FIGURE 3 – Une substitution en partant d'un motif simple

On va maintenant étudier notre exemple de pavage pour introduire les propriétés qui nous intéressent dans les sections 3, 4 et 5.

Dans notre exemple il y a trois types d'arêtes notées  $a, b, c$ .

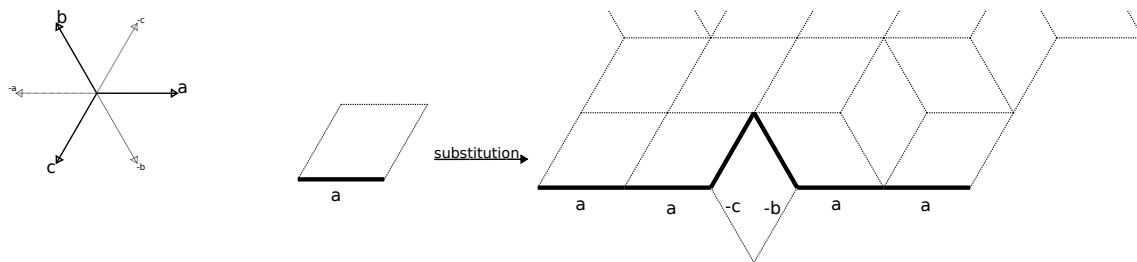


FIGURE 4 – À gauche les trois types d'arêtes, à droite l'effet de la substitution sur l'arête  $a$

Comme on le voit sur la figure 4, la substitution remplace l'arête  $a$  par  $a + a + -c + -b + a + a = 4a - b - c$ , de même  $b$  est remplacé par  $4b - a - c$  et  $c$  par  $4c - a - b$ . Cela nous permet donc de définir une matrice de dilatation  $M$  telle que le vecteur  $X$  dans la

base  $(a, b, c)$  soit remplacé par le vecteur  $M \cdot X$  où

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

On a bien  $\underbrace{\varphi(a)}_{\text{dilatation de } a} = M \cdot a = M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 4a - b - c.$

L'étude de  $M$  peut alors nous aider à mieux comprendre la dilatation donc la substitution et les pavages limites.

De même que sur les mots, on peut définir deux notions de pavage défini par la substitution :

1. en partant d'un motif initial  $R$  et si la limite existe  $\mathcal{T} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^n(T)$  [figure 3, 5].
2. on peut aussi définir l'ensemble des pavages infiniment désubstituables comme pour les mots.

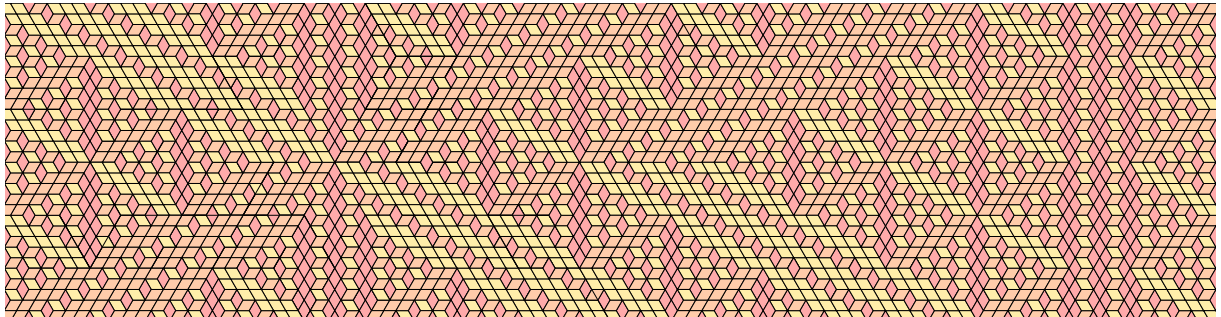


FIGURE 5 – Un morceau de pavage limite

Ce pavage limite est *quasipériodique* c'est à dire qu'il réunit deux propriétés intéressantes :

1. il n'est pas périodique : il n'existe pas de translation  $\tau$  tel que pour tout sommet  $s$  du pavage le voisinage de  $s$  et de  $\tau(s)$  sont identiques.
2. il est *récurrent uniforme* : pour chaque motif  $m$  qui apparaît dans le pavage, il existe un rayon  $r_m$  tel que pour tout point  $p$  du pavage,  $m$  apparaît dans la boule de centre  $p$  et de rayon  $r_m$ .

Pour prouver qu'il est récurrent uniforme on utilise la notion de *primitivité* de la substitution.

Un substitution est dite *primitive* lorsque pour chaque tuile  $t$ , il existe un entier  $k$  tel que dans la  $k$ ème itération de la substitution  $\sigma^k(t)$  toutes les tuiles apparaissent à translation près. Notre substitution est bien primitive car il y a une seule tuile qui a trois orientations, et chacune des trois orientations apparaît dans la substitution de chaque orientation de la tuile.

**Propriété 1.** *Si une substitution est primitive et elle a un pavage limite, alors ce pavage limite est récurrent uniforme.*

Notre exemple de pavage est donc bien quasipériodique.

Maintenant que l'on a introduit les propriétés et techniques dont on a besoin pour étudier les pavages substitutifs, on s'intéresse à la notion de *coupe-et-projection*.

## 2 Ensembles définis par Coupe et Projection

L'étude des ensembles définis par coupe-et-projection est motivée par l'études des quasicristaux en physique des matériaux. Les quasicristaux ont été découverts en 1982 et ont valu en 2011 le Prix Nobel de Chimie à Dan SHECHTMAN pour leur découverte.

Les quasicristaux sont des matières caractérisées par une structure atomique non périodique et des figures de diffraction discrètes et régulières lorsqu'elles sont soumises à des faisceaux de rayons X [1] [figure 1b]. Ces figures de diffraction sont les duaux des réseaux, ou pavages, que constituent les atomes.

Le modèle mathématique adopté pour étudier les quasicristaux est les ensembles par *coupe-et-projection* [1, 9].

### 2.1 Le cas $2 \rightarrow 1$

Pour comprendre les phénomènes de coupe et projection on va prendre le cas le plus simple : projection d'une coupe de  $\mathbb{R}^2$  sur une droite  $\mathcal{D}$  du plan [figure 6].

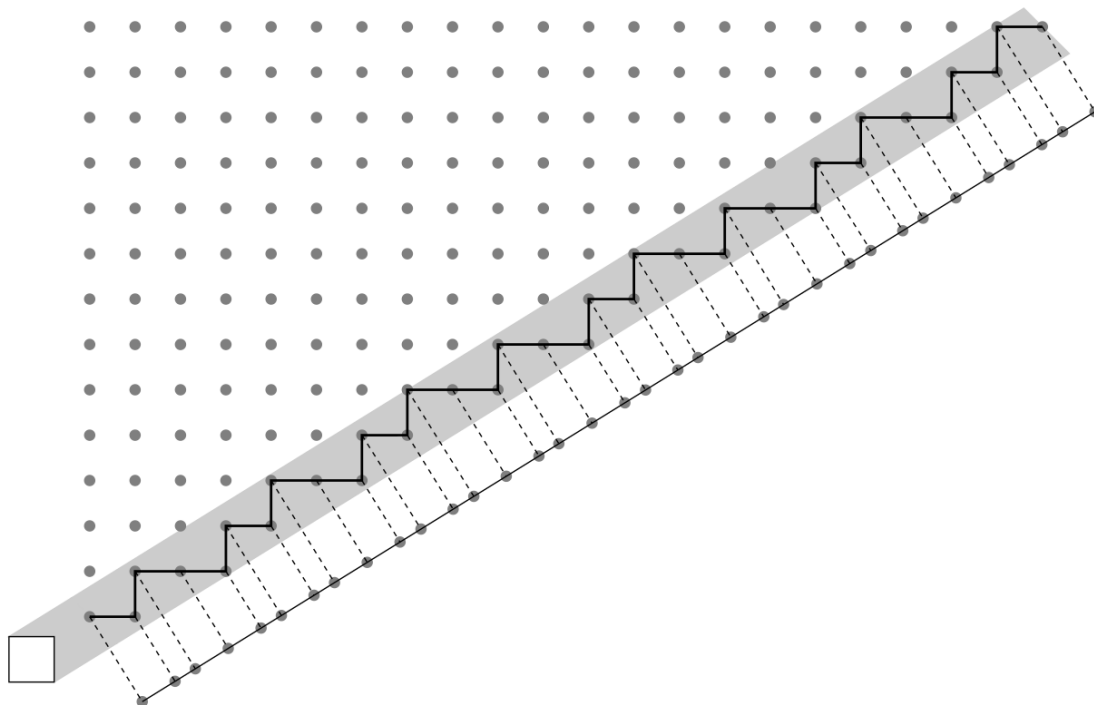


FIGURE 6 – La droite  $\mathcal{D}$  et la coupe  $\mathcal{D} + \mathcal{H}$

Le réseau dans lequel on travaille est  $\mathcal{L} = \mathbb{Z}^2$  et la droite  $\mathcal{D}$  est engendrée par  $(1, \frac{1}{\rho})$  ou  $\rho = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  est le nombre d'or.

La coupe de  $\mathbb{R}^2$  en gris sur la figure est  $\mathcal{D} + \mathcal{H}$  où  $\mathcal{H} = [0, 1]^2$ .

On prend ensuite les points du réseau dans la coupe pour constituer la droite discrète  $\mathcal{D}_d = \mathcal{L} \cap (\mathcal{D} + \mathcal{H})$ .

On peut ensuite projeter  $\mathcal{D}_d$  sur  $\mathcal{D}$  pour obtenir une succession de points espacés de  $a$  et  $b = a/\rho$  (projection des vecteurs unitaires à renormalisation près) ou sur  $\mathcal{D}^\perp$  pour obtenir la fenêtre  $\Omega$  qui est dense dans  $[-b, a]$  (projection de  $\mathcal{H}$  sur  $\mathcal{D}^\perp$ ).

Si on regarde maintenant la suite des longueurs entre points consécutifs de la projection

sur  $\mathcal{D}$  on obtient le même mot de fibonacci  $abaababaab\dots$  que par la substitution présentée au début de la section précédente.

## 2.2 Cas $n \rightarrow 2$

Un ensemble coupe-et-projection  $n \rightarrow 2$  est la projection d'un plan discret de l'espace  $\mathbb{R}^n$ .

On travaille donc sur le réseau  $\mathcal{L} = \mathbb{Z}^n$  de l'espace  $\mathbb{R}^n$ .

Dans cet espace on étudie un plan  $\mathcal{E}$  ou  $\mathcal{V}$ , et un espace supplémentaire orthogonal  $\mathcal{W} \oplus \mathcal{R}$  où  $\mathcal{R}$  est un espace rationnel et  $\mathcal{W}$  est irrationnel vis à vis de  $\mathcal{L}$ .

On munis alors  $\mathbb{R}^n$  des projections :

- $\Pi_{\mathcal{E}}$  sur  $\mathcal{E}$  et selon  $\mathcal{W} \oplus \mathcal{R}$
- $\Pi_{\mathcal{W}}$  sur  $\mathcal{W}$  et selon  $\mathcal{E} \oplus \mathcal{R}$
- $\Pi_{\mathcal{R}}$  sur  $\mathcal{R}$  et selon  $\mathcal{E} \oplus \mathcal{W}$
- $\Pi_{\mathcal{W} \oplus \mathcal{R}}$  sur  $\mathcal{W} \oplus \mathcal{R}$  et selon  $\mathcal{E}$

L'espace  $\mathbb{R}^n$  muni de  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{W}$  et  $\mathcal{R}$  est appelé *contexte de coupe-et-projection*.

On étudie la coupe de l'espace  $\mathcal{E} + \mathcal{H}$  où  $\mathcal{H}$  est un ensemble compact de volume non nul dans  $\mathbb{R}^n$ .

Dans le cas d'un  $n \rightarrow 2$  canonique  $H$  est l'hypercube  $[0, 1]^n$ .

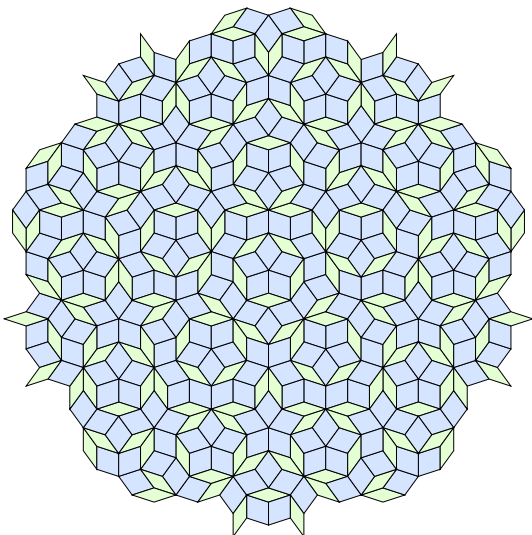
C'est alors que l'on définit l'ensemble  $\mathcal{E}_d$  appelé *coupe  $n \rightarrow 2$*  constitué des points de  $\mathcal{L}$  qui sont dans la coupe  $\mathcal{E} + \mathcal{H}$  c'est à dire  $\mathcal{L} \cap (\mathcal{E} + \mathcal{H})$ .

Pour étudier  $\mathcal{E}_d$  on le projette :

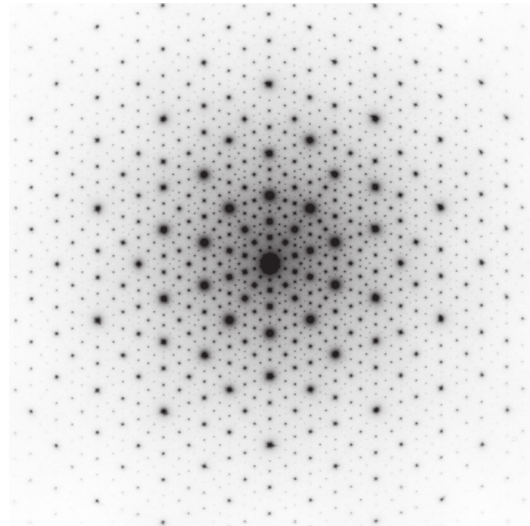
- sur  $\mathcal{E}$  pour obtenir  $\mathcal{T} = \Pi_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}_d)$  appelé ensemble *coupe-et-projection  $n \rightarrow 2$*  engendré par  $(\mathcal{E}, \mathcal{H}, \mathcal{W}, \mathcal{R})$ .
- sur  $\mathcal{W} \oplus \mathcal{R}$  pour obtenir  $\Omega = \Pi_{\mathcal{W} \oplus \mathcal{R}}(\mathcal{E}_d)$  appelé *fenêtre*.

De façon générale on appelle ensemble par coupe-et-projection  $n \rightarrow 2$  tout ensemble  $\mathcal{T}$  tel que :

- il existe  $n, \mathcal{L}, \mathcal{E}, \mathcal{W}, \mathcal{R}$  et  $\mathcal{H}$  tel que  $\mathcal{T}$  soit l'ensemble coupe-et-projection  $n \rightarrow 2$  engendré par  $(\mathcal{E}, \mathcal{H}, \mathcal{W}, \mathcal{R})$
- la cloture de la fenêtre  $\Omega$  engendrée par  $(\mathcal{E}, \mathcal{H}, \mathcal{W}, \mathcal{R})$  est compacte et d'intérieur non vide.



(a) Un motif central du pavage



(b) La figure de diffraction associée au pavage, elle correspond au quasicristal  $AlMnPd$

FIGURE 7 – Un pavage de PENROSE [6]



On appelle *pavage par coupe-et-projection* un pavage dont l'ensemble des sommets est un ensemble par coupe-et-projection.

Par exemple le pavage de Penrose est un  $5 \rightarrow 2$  [1, 6, 9] [figure 7] et le pavage de Amman-Beenker est un  $4 \rightarrow 2$  [1, 6, 9][figure 1.

### 2.3 Le 7-fold

Dans ce travail, on s'intéresse à un contexte  $7 \rightarrow 2$  particulier : le **7-fold**.

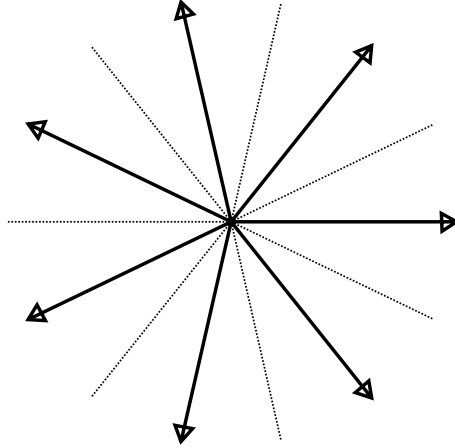


FIGURE 8 – La projection de la base canonique de  $\mathbb{R}^7$  dans le 7-fold

Dans le 7 – *fold*, le plan  $\mathcal{E}$  est généré par deux vecteurs

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) \\ \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) \\ \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right) \\ \cos\left(\frac{8\pi}{7}\right) \\ \cos\left(\frac{10\pi}{7}\right) \\ \cos\left(\frac{12\pi}{7}\right) \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) \\ \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) \\ \sin\left(\frac{6\pi}{7}\right) \\ \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) \\ \sin\left(\frac{10\pi}{7}\right) \\ \sin\left(\frac{12\pi}{7}\right) \end{pmatrix}$$

de façon à ce que la base canonique de  $\mathbb{R}^7$  se projète sur  $\mathcal{E}$  comme sur la figure 8.

Afin de décomposer l'espace  $\mathbb{R}^7$  de façon plus efficace on introduit le polynôme  $X^3 - X^2 - 2X + 1$  [figure 9].

Le plan  $\mathcal{E}$  est généré par

$$u(x) = (-x, 0, x, x^2-1, 1, -1, 1-x^2) \text{ et } v(x) = (x^2-1, 2x, x^2-1, 1-x, -x^2, -x^2, 1-x)$$

avec  $x = x_0$  la racine de  $X^3 - X^2 - 2X + 1$  proche de 1.8019.

On définit alors les plans  $\mathcal{E}'$  et  $\mathcal{E}''$  générés par  $(u(x), v(x))$  pour les deux autres racines réelles de  $X^3 - X^2 - 2X + 1$  :  $x_1 \approx 0.44504$  et  $x_2 \approx -1.2470$ .

Par construction  $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$  et  $\mathcal{E}''$  sont orthogonaux.

On définit alors  $\mathcal{W} = \mathcal{E}' + \mathcal{E}''$  et  $\mathcal{R} = \Delta$  où  $\Delta$  est la droite générée par  $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ . De plus  $\Delta$  est orthogonale à  $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$  et  $\mathcal{E}''$  donc  $\mathbb{R}^n = \mathcal{E} \oplus \mathcal{E}' \oplus \mathcal{E}'' \oplus \Delta$ .

C'est dans ce contexte appelé *7-fold* que j'ai travaillé pour trouver un pavage substitutif par coupe-et-projection avec invariance par rotation d'angle  $\frac{2\pi}{7}$ .

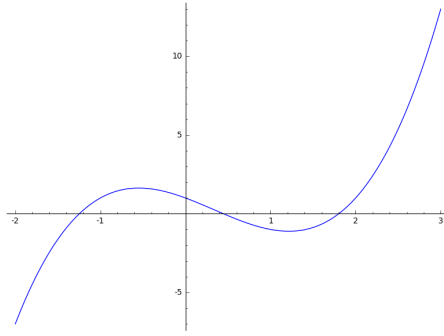


FIGURE 9 – Le graphe du polynome  $X^3 - X^2 - 2X + 1$

### 3 Étude du pavage proposé par Jarkko Kari

#### 3.1 Présentation du pavage

Dans leur article Jarkko KARI et Markus RISSANEN proposent un système pour obtenir des pavages quasipériodiques substitutif avec invariance par rotation  $\frac{2\pi}{n}$  pour tout  $n$  [7]. En particulier l'article présente en détail le cas  $n = 7$ . Leur article part d'un figure initiale appelée *Rose* et noté  $R_2^1$  [figure 10] et d'une substitution *ad hoc*  $\sigma$  [figure 11].

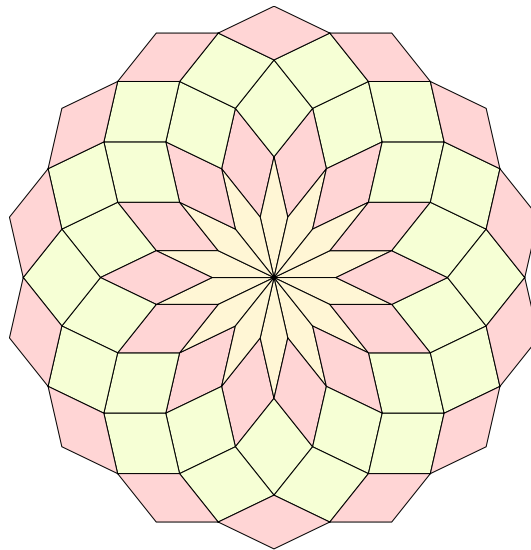


FIGURE 10 – Le motif initial  $R_2^1$

On itère la substitution en partant de la *Rose*  $R_2^1$ , et en étudiant la substitution on se rend compte qu'à chaque étape il y a une *Rose* au centre du pavage partiel obtenu, on peut donc les centrer sur le même point et donc obtenir la limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^n (R_2^1)$ . Cependant, à chaque dilatation, les métatuiles sont tournées de  $\frac{\pi}{14}$  [figure 16] : le vecteur dilaté  $\sigma_d(e_1)$  n'est pas colinéaire à  $e_1$  mais est la bissectrice de  $e_1$  et  $-e_5$ , on peut palier ce problème en considérant  $\sigma' = \sigma^2$  la double substitution.

#### 3.2 Étude du pavage pour une coupe-et-projection

On étudie ce pavage dans le contexte du 7-fold. Il nous faut donc extrapoler des ensembles de points de  $\mathbb{Z}^7$  depuis les figures du motif  $R_2^1$  et de la substitution  $\sigma$ . Par abus

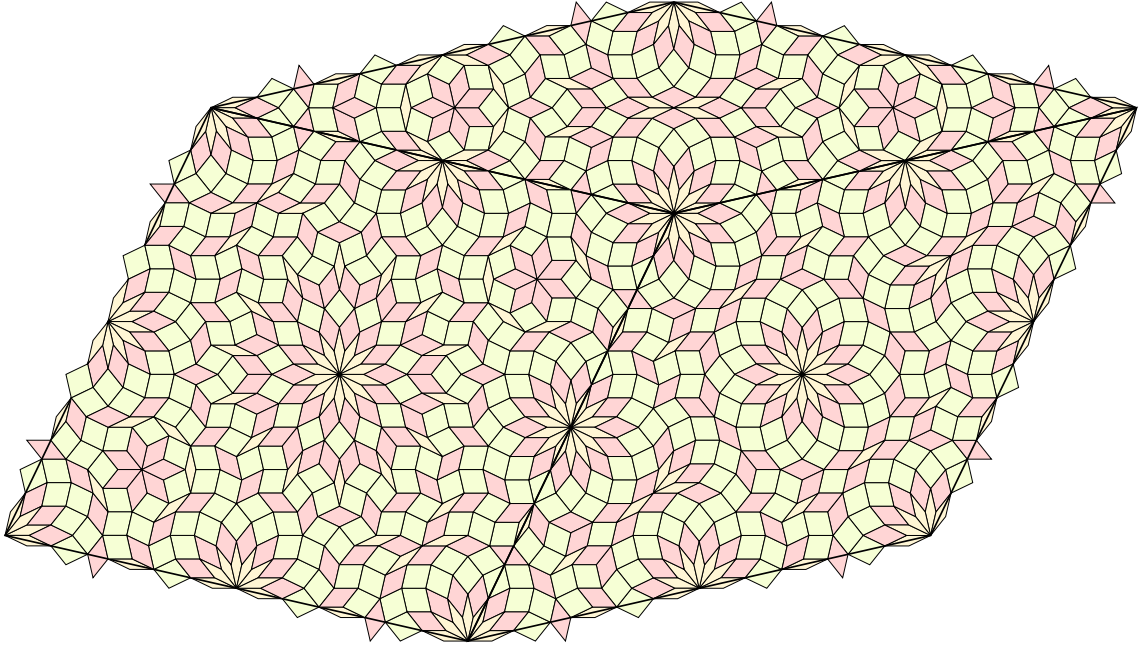


FIGURE 11 – La substitution  $\sigma$ , le facteur de dilatation est  $S \approx 19.6893$

de langage on donne le même nom à  $R_2^1$  (resp.  $\sigma$ ) et à sa projection sur  $\mathcal{E}$ .

La première étape est d'étudier  $R_2^1$  sur les espaces  $\mathcal{E}'$ ,  $\mathcal{E}''$  et  $\Delta$ .

— sur  $\mathcal{E}'$  et  $\mathcal{E}''$  on a des nuages de points centrés autour de l'origine

— sur  $\Delta$  on a trois valeurs  $\{-d, 0, d\}$  pour  $d = \frac{1}{\sqrt{7}}$ .

La deuxième étape est l'étude des bords de la substitution [figure 12] et de la matrice de dilatation.

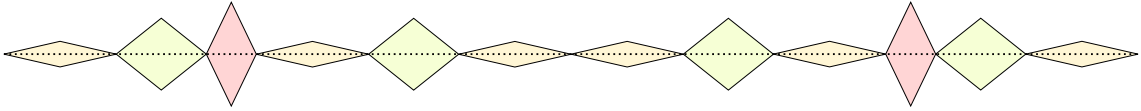


FIGURE 12 – Le bord de la substitution

De ce bord on en déduit la matrice de dilatation  $M$  qui va nous permettre d'étudier le comportement géométrique de la dilatation  $\varphi$  associée à la substitution  $\sigma$ .

$$M = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 & -4 & -6 & -2 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 0 & -4 & -6 & -2 \\ -2 & 2 & 6 & 4 & 0 & -4 & -6 \\ -6 & -2 & 2 & 6 & 4 & 0 & -4 \\ -4 & -6 & -2 & 2 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & -2 & 2 & 6 & 4 \\ 4 & 0 & -4 & -6 & -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Cette matrice admet les espaces  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{E}'$ ,  $\mathcal{E}''$  et  $\Delta$  comme espaces propres avec des valeurs propres complexes  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ . Pour que ce pavage puisse être un pavage coupe-et-projection pour le **7-fold** il faut :

—  $|\lambda_1| > 1$  en effet une valeur propre de module strictement supérieur à 1 sur  $\mathcal{E}$  garantit le fait que la substitution fait grandir le pavage, un pavage du plan infini est donc possible.

- $|\lambda_2|, |\lambda_3| < 1$  des valeurs propre de modules strictement inférieur à 1 sur  $\mathcal{E}'$ ,  $\mathcal{E}''$  garantissent que la projection sur  $\mathcal{W}$  ne grandis pas à l'infini, et permettent donc un pavage par coupe-et-projection.

$M$  a pour valeurs propres :

$$\begin{aligned} |\lambda_1| &= S \approx 19.6893 \\ |\lambda_2| &\approx 2.0112 \\ |\lambda_3| &\approx 0.5345 \\ |\lambda_4| &= 0 \end{aligned}$$

Ce qui exclus donc la possibilité que ça soit un pavage par coupe et projection.

**Théorème 1.** *Le pavage proposé par Jarkko KARI et Markus RISSANEN n'est pas un pavage par coupe-et-projection du 7-fold.*

*Démonstration.* Soit  $O = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$  et  $X_0 = (0, 0, 0, -1, 0, 0, 1)$ , ces deux points sont dans la Rose  $R_2^1$ . On a  $|\Pi_2(O)| = 0$  et  $|\Pi_2(X_0)| = d_2 \approx 0.8358$

Si on opère la dilatation on a  $|\Pi_2(\varphi^n(X_0))| = |\lambda_2|^n \cdot d_2 \approx 2^n \cdot 0.8$  et  $\Pi_2(\varphi^n(O)) = O$ . Donc  $|\Pi_2(\varphi^n(X_0)) - \Pi_2(\varphi^n(O))| = 2^n d_2$  est non borné ce qui veut dire que  $\Pi_2(\sigma^n(R_2^1))$  est non borné. Donc la fenêtre  $\Omega$  engendrée par cette substitution est non bornée, donc sa cloture n'est pas compacte et donc  $\Omega$  n'est pas une fenêtre de coupe-et-projection. Ce qui implique que le couple  $(R_2^1, \sigma)$  ne génère pas un pavage par *coupe-et-projection*.  $\square$

## 4 Pavages et matrices de substitution de Harriss

### 4.1 Présentation de la technique de Harriss en dimension 5

Dans sa thèse Edmund HARRIS étudie les pavages canoniques projectifs et substitutifs. Ses résultats majeurs sont :

1. Un pavage canonique projectif est un pavage substitutif canonique si et seulement si les espaces  $\mathcal{V}, \mathcal{W}, \mathcal{R}$  sont les espaces propres d'une matrice d'expansion quadratique qui satisfait les propriétés de pavage et de hiérarchie des sommets. [9][Théorème 2]
2. Toute substitution canonique qui génère le pavage de PENROSE est associé à la matrice d'expansion canonique  $M_P^m$  pour  $m \in \mathbb{Z}^+$  [9] [Théorème 4]

$$M_P = \text{circ}(1, 1, 0, 0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le premier résultat implique que pour un pavage substitutif canonique les espaces  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{W}$  sont générés par des vecteurs de  $\mathbb{Q}[r]$  pour  $r$  un nombre algébrique quadratique (racine d'un polynôme de degré deux à coefficients entiers). Or pour le 7-fold le plan  $\mathcal{E}$  n'est pas quadratique mais cubique, donc il n'y a pas d'espoir de trouver un pavage substitutif canonique du 7-fold. Cela implique qu'il nous faut chercher un pavage dont l'épaisseur  $\mathcal{H}$  n'est pas l'hypercube.

Le second résultat nous a poussé à étudier la matrice

$$M = \text{circ}(1, 1, 0, 0, 0, 0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$M$  admet bien  $\mathcal{E}, \mathcal{E}', \mathcal{E}''$  et  $\Delta$  comme espaces propres avec les valeurs propres  $|\lambda_1| \approx 2.246980$ ,  $|\lambda_2| \approx 0.801938$ ,  $|\lambda_3| \approx 0.554958$ ,  $\lambda_4 = 3$ . On introduit aussi  $B = \text{circ}(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) = (1)_{1 \leq i, j \leq 7}$  qui a pour valeurs propres  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$  et  $\lambda_4 = 7$ .

On a donc essayé de trouver un pavage associé à une matrice du type  $M^{k_1} + k_2 B$  qui a donc pour valeurs propres  $|\lambda_1| \approx 2.246980^{k_1}$ ,  $|\lambda_2| \approx 0.801938^{k_1}$ ,  $|\lambda_3| \approx 0.554958^{k_1}$ ,  $\lambda_4 = 3^{k_1} + k_2 * 7$ .

Notre premier essai a été avec  $M_0 = M^2 - B$ . En revanche  $M_0$  nous donne seulement les bords d'une substitution, et encore, à ordre près. Il faut donc réussir à trouver un pavage qui remplisse les métatuiles avec le bord qui correspond à  $M_0$

## 4.2 Critère de Pavabilité de Kenyon

Dans son article de 1993 Richard KENYON a proposé un critère simple pour la pavabilité d'un polygone par des parallélogrames [10]. Ce critère nécessite de donner un sens de lecture circulaire noté  $\prec$  sur les arêtes  $e_1, e_2, \dots, e_m$  de vecteurs directeurs  $v_1, \dots, v_n$ , et ensuite faire un couplage sur les arêtes tel que  $(e_i, e_j)$  est dans le couplage alors  $v_i = -v_j$  [figure 13].

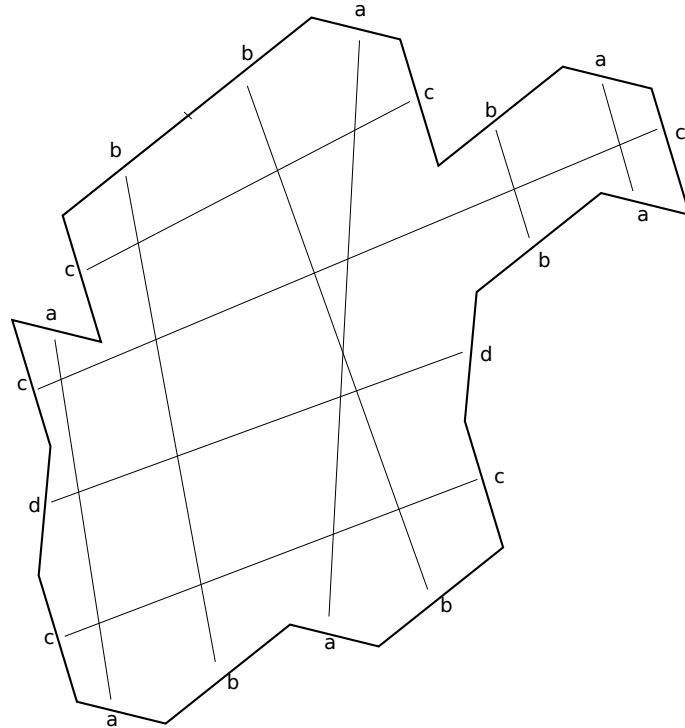


FIGURE 13 – Un polygone avec un couplage

On a besoin de définir un peu de vocabulaire :

- on dit que deux paires  $(e_i, e_j), (e_k, e_l)$  se croisent si  $e_i \prec e_k \prec e_j \prec e_l$  dans le sens de lecture.
- étant donné une arête  $e_i$  on définit le vecteur  $v_i^\perp$  tel que  $v_i \cdot v_i^\perp = 0$  et  $v_i^\perp$  est dirigé vers l'intérieur du polygone.

Un couplage est dit *admissible* si pour chaque couple de paires d'arêtes  $(e_i, e_j), (e_k, e_l)$  qui se croisent avec  $e_i \prec e_k \prec e_j \prec e_l$  on a  $v_i^\perp \cdot v_k > 0$  [figure 14].

**Théorème 2** (KENYON93). *Si il existe un couplage est admissible alors on peut paver le polygone.*

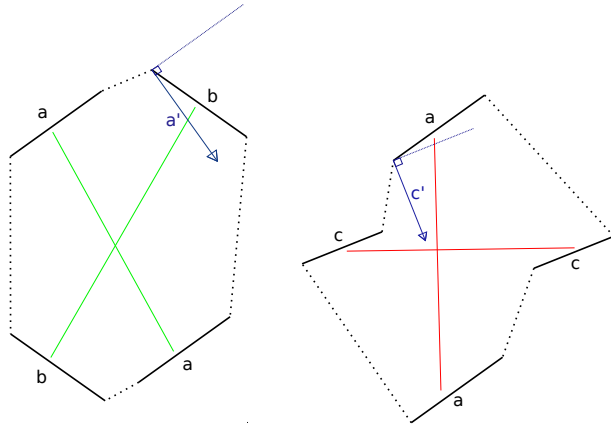


FIGURE 14 – À gauche un croisement admissible et à droite un croisement non-admissible

De plus si un tel pavage existe, il existe un algorithme proposé dans l'article pour l'obtenir. Et en appliquant cet algorithme à notre pavage  $\mathcal{T}_0$  de matrice  $M_0$  on obtient un couplage qui ne marche pas [figure 15].

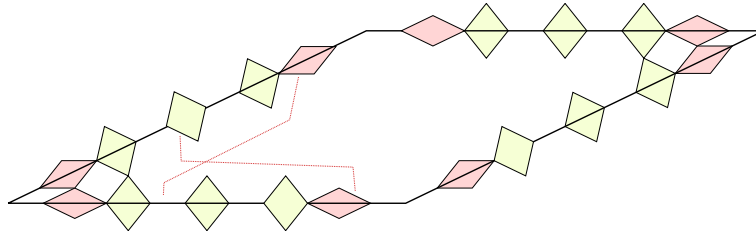


FIGURE 15 – Un croisement non-admissible dans la metatuile

À force d'expérimentations on a trouvé une grosse matrice  $M_6 = M^6 - 104B$  telle que le pavage semble être admissible pour  $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$  et  $\mathcal{E}''$  et pavable. Cependant à ce moment on a rencontré un problème sur  $\Delta$

### 4.3 Projection sur $\Delta$

Cette nouvelle matrice candidat a un problème sur  $\Delta$  : malgré une valeur propre de 1, due à la forme de la substitution des points avec des coordonnées sur  $\Delta$  de plus en plus grand. Ce qui pose rend impossible l'existence d'un pavage par coupe-et-projection associé à cette substitution, donc on a regardé les différentes matrices qu'on peut obtenir avec la technique de Edmund HARRIS mais on n'a trouvé aucune matrice de substitution qui aie une valeur propre  $< 1$  sur  $\Delta$ , or la technique de Jarkko KARI avait un valeur propre de 0 ce qui la rendait admissible pour  $\Delta$ .

Pour rappel, la technique de Jarkko KARI utilise une rotation de  $\frac{\pi}{14}$  à chaque substitution [figure 16], de cette façon la métatuile est tournée avant la subdivision ce qui permet de régler les problèmes sur  $\Delta$  : grâce à la valeur propre  $\lambda_4 = 0$ , à chaque dilatation, tous les points sont ramenés dans l'espace orthogonal à  $\Delta$  ce qui assure l'absence de divergence sur  $\Delta$ .

On a donc décidé d'essayer de trouver un nouveau pavage utilisant cette rotation de  $\frac{\pi}{14}$  afin de régler le problème sur  $\Delta$ .

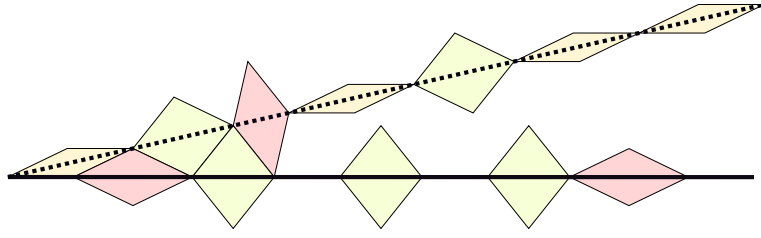


FIGURE 16 – En ligne pleine  $\sigma_H(e_1)$  classique et en pointillés  $\sigma_K(e_1)$  avec une rotation de  $\frac{\pi}{14}$

## 5 Un nouveau pavage candidat

Le nouveau pavage, inspiré de celui proposé par Jarkko KARI [7] correspond à la matrice suivante

$$C = \text{circ}(5, 2, -2, -5, -4, 0, 4) = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 & -4 & -5 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 0 & -4 & -5 & -2 \\ -2 & 2 & 5 & 4 & 0 & -4 & -5 \\ -5 & -2 & 2 & 5 & 4 & 0 & -4 \\ -4 & -5 & -2 & 2 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -2 & 2 & 5 & 4 \\ 4 & 0 & -4 & -5 & -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

On a bien  $\mathcal{E}, \mathcal{E}', \mathcal{E}''$  et  $\Delta$  comme espaces propres avec des valeurs propres

$$|\lambda_1| = 17.7394, |\lambda_2| = 0.4475, |\lambda_3| = 0.3332 \text{ et } \lambda_4 = 0$$

ce qui est un bon signe pour la substitution.

NB : cette matrice n'est pas de la forme  $M^{k_1} + k_2 B$  car  $M$  a une valeur propre 3 sur  $\Delta$  et  $B$  une valeur propre de 7, donc  $M^{k_1} + k_2 B$  a une valeur propre  $3^{k_1} + k_2 7 \neq 0$  pour  $(k_1, k_2) \neq (0, 0)$ . Donc  $C$  n'est pas de la forme proposée dans la section 4.

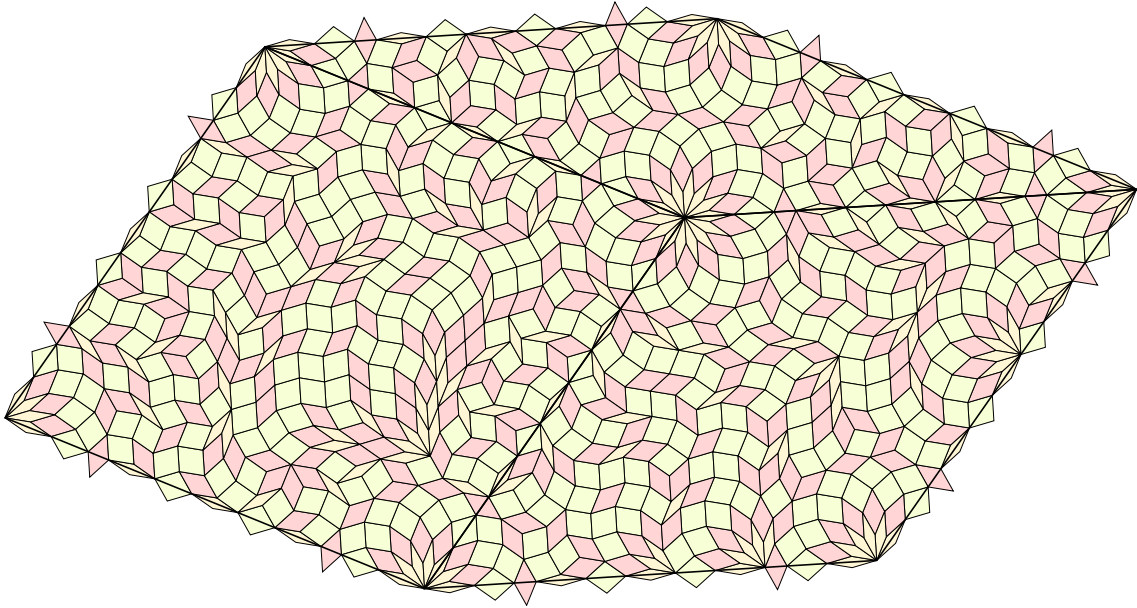


FIGURE 17 – La substitution  $\sigma$  associée à  $C$

J'ai réussi à trouver un pavage des métatuiles en respectant les bords imposés par la matrice  $C$  et donc définis la substitution  $\sigma$  associée [figure 17].

Le motif initial est la *Rose*  $R_2^1$  [figure 9] comme pour le pavage de la section 3.

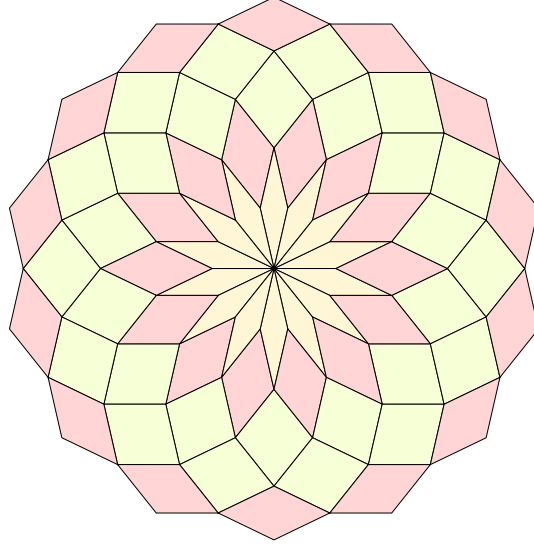


FIGURE 9 – Le motif initial est  $R_2^1$

**Théorème 3.**  $\mathcal{E}_d = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_0^n(R_2^1)$  est un pavage coupe-et-projection du 7-fold avec invariance par rotation d'angle  $\frac{2\pi}{7}$ .

*Démonstration.* On commence par formaliser un peu :

- $\sigma$  est une fonction de  $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^n)$  dans  $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^n)$
- $\varphi$  est la fonction de dilatation de  $\mathbb{Z}^n$  dans  $\mathbb{Z}^n$  définie par  $\varphi(x) = C \cdot x$
- les projections  $\Pi_{\mathcal{E}}, \Pi_{\mathcal{E}'}, \Pi_{\mathcal{E}''}, \Pi_{\Delta}$  sont définies comme dans le paragraphe sur le 7-fold

Le but est de montrer que sur  $\mathcal{E}', \mathcal{E}''$  et  $\Delta$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi(\sigma^n(R_2^1))$  existe et est borné.

**Lemme technique 1.** Soit  $n \in \mathbb{N}$  et l'espace  $\mathbb{R}^n$  muni d'un sous espace  $\mathcal{W}$  et muni de la base canonique  $(e_1, \dots, e_n)$  et de l'ensemble  $S = \{\pm e_1, \dots, \pm e_n\}$  des vecteurs canoniques. On définit la projection  $\Pi_{\mathcal{W}}$  orthogonale sur  $\mathcal{W}$ , et la propriété *linked* sur les ensembles par

$$\text{linked}(X) \Leftrightarrow \left( \forall x, y \in X, \exists k, x_0, \dots, x_k, \begin{cases} x_0 = x \\ x_k = y \\ \forall 0 \leq i < 1, \exists \varepsilon \in S = \{\pm e_1, \dots, \pm e_n\}, x_{i+1} = x_i + \varepsilon \end{cases} \right)$$

Soit  $f$  une fonction  $\mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$  et  $F$  une fonction  $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^n) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Z}^n)$  telles que

- $\forall x, F(\{x\}) = \{f(x)\}$ ,
- $\forall X \subseteq Y, F(X) \subseteq F(Y)$
- $\exists \lambda < 1, \forall x \in \mathbb{R}^n, \|\Pi_{\mathcal{W}}(f(x))\| \leq \lambda \|\Pi_{\mathcal{W}}(x)\|$
- $\forall X, \text{linked}(X) \Rightarrow \text{linked}(F(X))$
- $\exists D \in \mathbb{R}^+, \text{ pour tout carré unitaire } X, F(X) \text{ a un diamètre inférieur ou égal à } D \text{ c'est à dire } \forall x, \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S \text{ non colinéaires, soit } X = \{x, x + \varepsilon_1, x + \varepsilon_2, x + \varepsilon_1 + \varepsilon_2\}, \forall x', y' \in F(X), \|x' - y'\| \leq D$



—  $\forall X$ , pour tout recouvrement de  $X$  par des carrés unitaires  $X_1, \dots, X_p$  c'est à dire

$$\begin{cases} \forall x \in X, \exists i, x \in X_i \\ \forall \text{ carré unitaire } Y \subseteq X, \exists i, Y = X_i \end{cases}, \text{ l'image de } X \text{ par } F \text{ est l'union des images} \\ \text{des } X_i \text{ par } F \text{ c'est à dire } F(X) = \bigcup_{i=1 \dots p} F(X_i)$$

Soit  $X_0$  un ensemble fini tel que  $\text{linked}(X_0)$ .

Alors  $X_\infty^W = \lim_{i \rightarrow \infty} \Pi_{\mathcal{W}}(F^i(X_0))$  existe et  $\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall x, y \in X_\infty^W, \|x - y\| \leq M$

En appliquant ce lemme sur les espaces  $\mathcal{E}', \mathcal{E}''$  et  $\Delta$  on obtient que la fenêtre  $\Omega$  est bornée. Sa clôture  $\bar{\Omega}$  est donc compacte, et de plus d'intérieur non vide car 0 est dans son intérieur.

Donc  $\mathcal{E}_d$  est bien un pavage par coupe et projection avec une invariance par rotation d'angle  $\frac{2\pi}{7}$  □

## Conclusion et perspectives

Durant mon stage j'ai étudié les pavages substitutifs et par coupe-et-projection. L'intérêt des pavages substitutifs et que la règle de substitution permet d'obtenir des propriétés fines sur le pavage alors que l'intérêt des pavages par coupe-et-projection est dans l'interprétation comme sous-espace discret et comme objet physique (quasicristal).

Mon premier résultat concerne un pavage substitutif ayant une symétrie 7-fold proposé par Jarkko KARI et Markus RISSANEN [7] : l'ensemble de ses sommets n'est pas un ensemble coupe-et-projection.

J'ai donc tenté une deuxième approche basée sur le travail de Edmund HARRISS sur les pavages substitutifs canoniques et en particulier le pavage de PENROSE [9]. Malheureusement cette approche s'est révélée infructueuse mais elle m'a permis une compréhension fine du problème, en particulier j'ai du comprendre comment générer des nouveaux pavages.

Mon résultat principal est l'existence d'un pavage qui réunit les trois propriétés souhaitées :

1. il est substitutif
2. l'ensemble de ses sommets est un ensemble coupe-et-projection
3. il admet une invariance par rotation d'angle  $\frac{2\pi}{7}$

De plus ce pavage est explicitement décrit par une substitution  $\sigma$  associée à la matrice de dilatation  $C$ . Cependant on ne connaît précisément ni l'épaisseur  $\mathcal{H}$  de la coupe, ni la fenêtre  $\Omega$  (qui est a priori un ensemble fractal [1]). Il est donc prévu de continuer à étudier en détails ce pavage pour caractériser  $\mathcal{H}$  et  $\Omega$ . La dilatation  $\varphi$ , c'est à dire la matrice  $C$ , semble être optimale mais cela reste à prouver et surtout la subdivision  $\psi$  ne semble pas être optimale donc on a prévu de chercher une subdivision optimale et d'en prouver l'optimalité. De plus, je n'ai pas exploré toutes les approches existantes comme par exemple les classes d'isomorphismes locaux et automorphismes associés à des substitutons [9, 11].

Ce travail de coupe-et-projection en dimension 7 et d'invariance par rotation  $\frac{2\pi}{7}$  est déjà intéressant en tant que tel et nous a permis de comprendre quels types de contraintes existent pour avoir un pavage qui soit substitutif et par coupe et projection mais l'objectif ultime est de généraliser ce résultat à la dimension  $2n+1$  et l'invariance par rotation  $\frac{2\pi}{2n+1}$ . C'est à dire trouver une famille de pavages du plan  $(\mathcal{T}_n)_{n \geq 3}$  telle que pour tout  $n$

1.  $\mathcal{T}_n$  est défini par une substitution
2. l'ensemble des sommets de  $\mathcal{T}_n$  est un ensemble défini par coupe-et-projection de type  $2n+1 \rightarrow 2$
3. le pavage  $\mathcal{T}_n$  a une invariance par rotation  $\frac{2\pi}{2n+1}$ .

## Références

- [1] Michael Baake, Uwe Grimm, and Robert V Moody. What is aperiodic order? *arXiv preprint math/0203252*, 2002.
- [2] Thomas Fernique and Nicolas Ollinger. Combinatorial substitutions and sofic tilings. *arXiv preprint arXiv :1009.5167*, 2010.
- [3] Chaim Goodman-Strauss. Matching rules and substitution tilings. *Annals of Mathematics*, pages 181–223, 1998.
- [4] Dov Levine and Paul Joseph Steinhardt. Quasicrystals : a new class of ordered structures. *Physical review letters*, 53(26) :2477, 1984.
- [5] M Audier and P Guyot. Al4mn quasicrystal atomic structure, diffraction data and penrose tiling. *Philosophical Magazine B*, 53(1) :L43–L51, 1986.
- [6] Michael Baake and Uwe Grimm. *Aperiodic Order*, volume 1. Cambridge University Press, 2013.
- [7] Jarkko Kari and Markus Rissanen. Sub rosa, a system of quasiperiodic rhombic substitution tilings with n-fold rotational symmetry. *Discrete & Computational Geometry*, 55(4) :972–996, 2016.
- [8] Thomas Fernique. *Pavages, Fractions Continues et Géométrie Discrète*. PhD thesis, université Montpellier II, 2007.
- [9] Edmund O Harriss. *On canonical substitution tilings*. PhD thesis, University of London, 2004.
- [10] Richard Kenyon. Tiling a polygon with parallelograms. *Algorithmica*, 9(4) :382–397, 1993.
- [11] Pierre Arnoux, Maki Furukado, Edmund Harriss, and Shunji Ito. Algebraic numbers, free group automorphisms and substitutions on the plane. *Transactions of the American Mathematical Society*, 363(9) :4651–4699, 2011.