# Comptage des mots engendrés par intervalles

Anna FRID

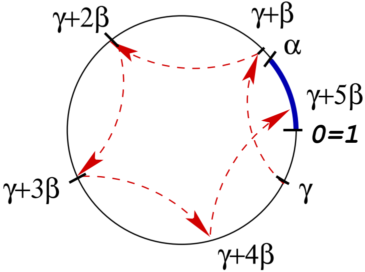
Novossibirsk/France

9 octobre 2012

# 3 résultats

- (avec J. Cassaigne, 2007) Complexité arithmétique de mots sturmiens = comptage de mots de rotation dont la longueur d'intervalle est donnée.
- (avec D. Jamet, 2013) Comptage des mots de rotation.
- (avec P. Ambrož, Z. Masáková, E. Pelantová, 2011) échange de 3 intervalles.

# Mots de rotation

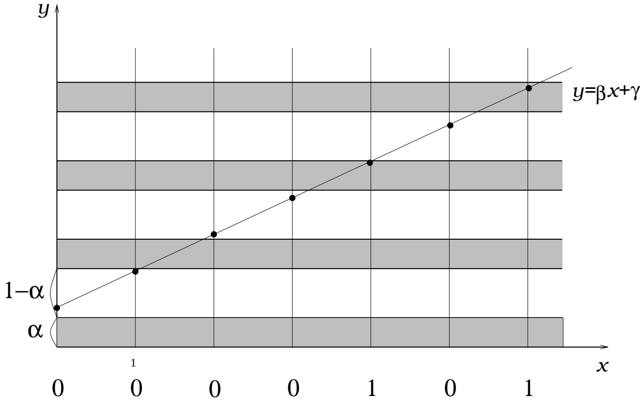



$w = 00000\textcolor{blue}{1}\cdots$

# Mots de rotation

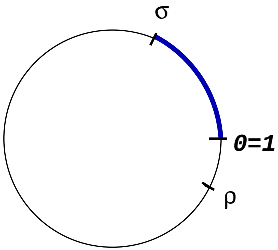
Avec 3 constantes $\alpha, \beta, \gamma \in [0,1[$, le mot $w = w_0 w_1 w_2 \cdots$ est défini comme

$$w_i = \begin{cases} 1 \text{ si } \{i\beta + \gamma\} < \alpha, \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$



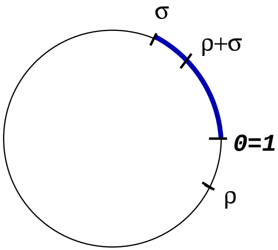
# Cas particulier : mots sturmiens

$\alpha = \beta = \sigma$



# Cas particulier : mots sturmiens

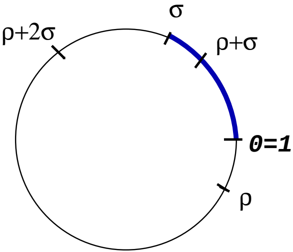
$\alpha = \beta = \sigma$




$w = 1 \cdots$

# Cas particulier : mots sturmiens

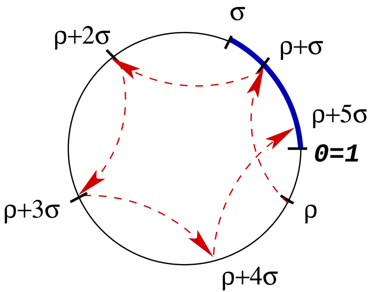
$\alpha = \beta = \sigma$




$w = {\color{blue}1}0 \cdots$

# Cas particulier : mots sturmiens

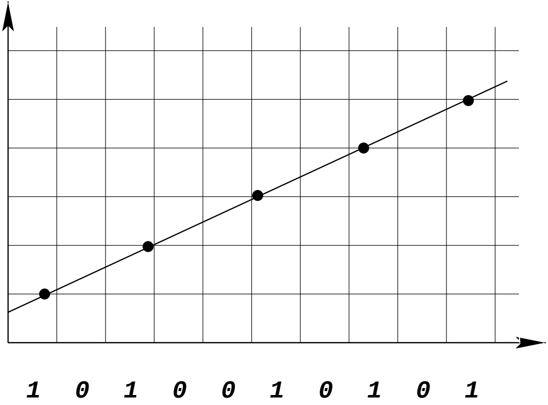
$\alpha = \beta = \sigma$




$w = \color{blue}{10001}\cdots$

# Définition mécanique

$$y = \sigma x + \rho, \quad 0 \leq \sigma, \rho < 1.$$




$$w = w_1 w_2 \cdots$$

$$w_n = \lfloor n\sigma + \rho \rfloor - \lfloor (n-1)\sigma + \rho \rfloor \quad (\text{ ou } \lceil \cdot \rceil).$$

# Exemple : mot de Fibonacci

## Example

$$\varphi(0) = 01, \varphi(1) = 0$$

$$0 \to 01 \to 01\ 0 \to 010\ 01 \to 01001\ 010 \to 01001010\ 01001 \to \cdots$$

La limite est

$$\varphi^{\infty}(a) = 0100101001001010010100100101001001\cdots$$

## Lemma

*Le mot de Fibonacci est sturmien avec* $\sigma = \rho = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

G. Rote (1992) : dans chaque mot de rotation, il y a au maximum $2n$ facteurs de longueur $n$.
(toujours si $\alpha > \beta$, $\beta \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, $\alpha$ et $\beta$ sont rationnellement indépendants)

Dans chaque mot sturmien, il y a $n + 1$ facteurs de longueur $n$.
($\alpha = \beta \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$)

Si $\beta$ est rationnel, le mot de rotation est périodique, avec la complexité constante.

## Question

Combien y-a-t-il de mots sturmiens de longueur $n$ sur l'alphabet $\{0, 1\}$ ?

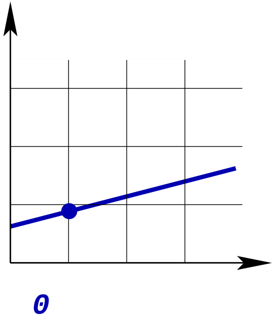
Réponse :

- Lipatov, 1982 ;
- Mignosi, 1991 ;
- Berstel, Pocchiola, 1993 méthode géométrique.

$$1 + \sum_{p=1}^{n} \varphi(p)(n + 1 - p) = \frac{n^3}{\pi^2} + O(n^2 \log n).$$

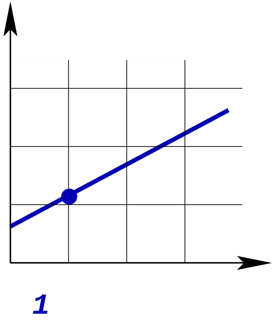
# Première lettre

Considérons la droite $y = \sigma x + \rho$, $0 < \sigma, \rho < 1$ et le mot sturmien qu'elle engendre.



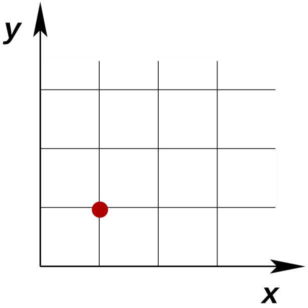

$$\sigma + \rho < 1 \Longrightarrow w_1 = 0.$$

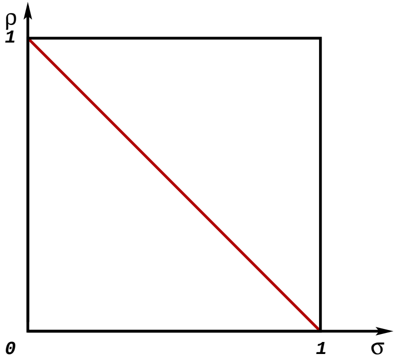
Considérons la droite $y = \sigma x + \rho$, $0 < \sigma, \rho < 1$, et le mot sturmien qu'elle engendre.



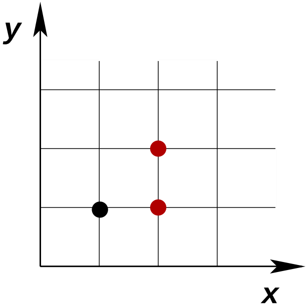

$$\sigma + \rho > 1 \Longrightarrow w_1 = 1.$$

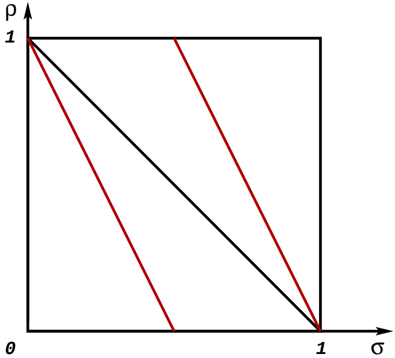
# Première lettre et l'image duale



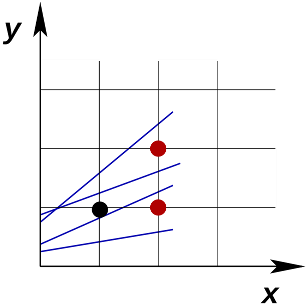

La droite sur l'image duale est $\sigma + \rho = 1$.

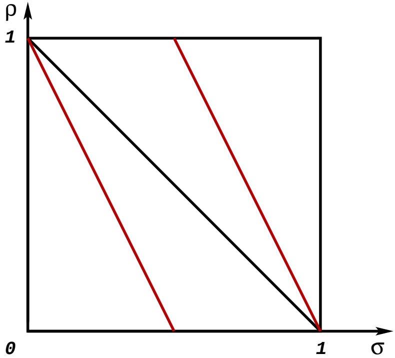



Deux nouvelles droites : $2\sigma + \rho = 1$, $2\sigma + \rho = 2$.

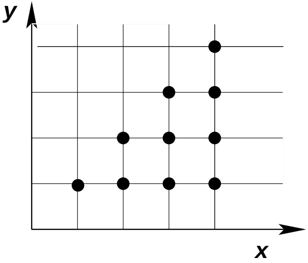
# Deux lettres et l’image duale

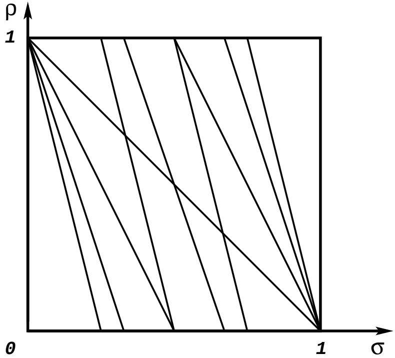



Deux nouvelles droites : $2\sigma + \rho = 1$, $2\sigma + \rho = 2$.

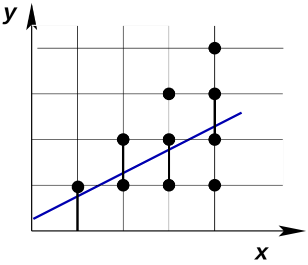
# Image duale

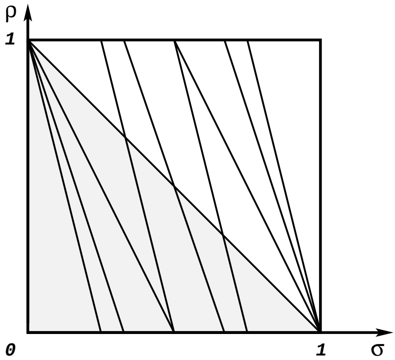


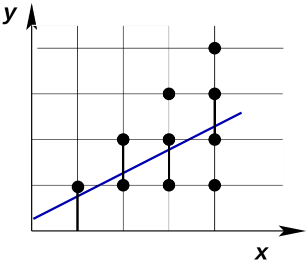

Points $\Longleftrightarrow$ droites

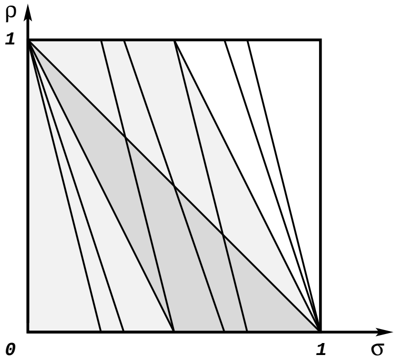
# Faces de l'image duale



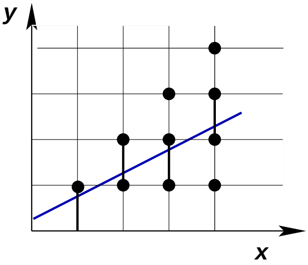



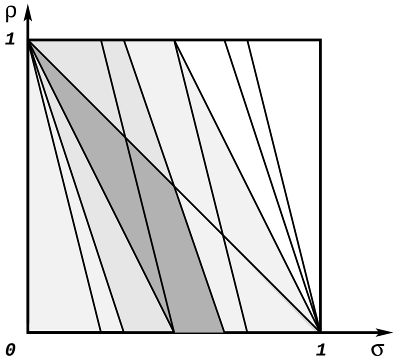
# Faces de l'image duale



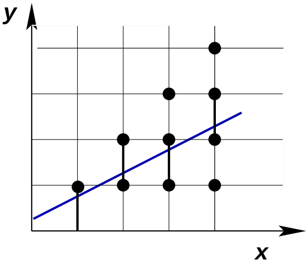



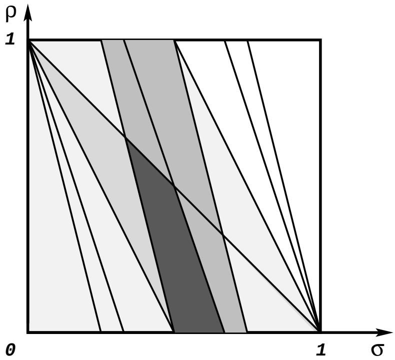
# Faces de l'image duale



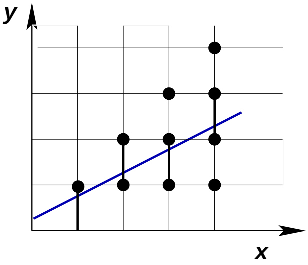



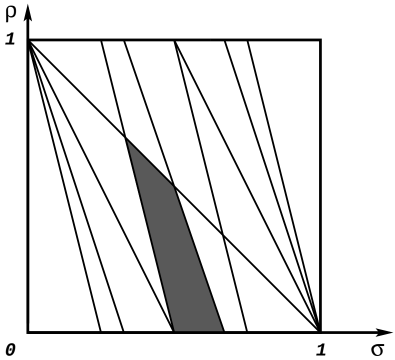
# Faces de l'image duale



# Faces de l'image duale

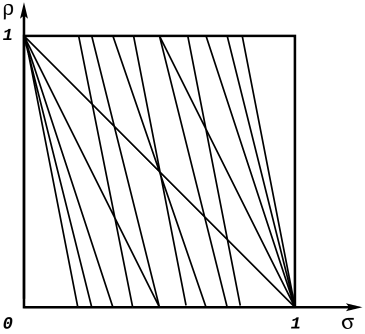


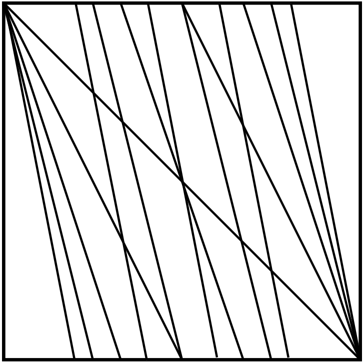
# Faces de l'image duale

**Lemma**

*Le nombre de mots sturmiens de longueur $n$ est égal au nombre de faces de l'image duale d'ordre $n$.*



# Qu'est-ce qu'on sait sur les faces ?



$$v - e + f = 1.$$

**Théorème [Lipatov 82, Mignosi 91, Berstel, Pocchiola 93]**

Le nombre de mots sturmiens de longueur $n$ est

$$1 + \sum_{p=1}^{n} \varphi(p)(n+1-p) = \frac{n^3}{\pi^2} + O(n^2 \log n).$$

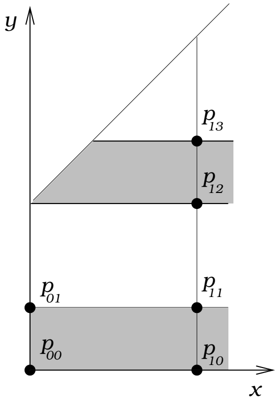
## Question

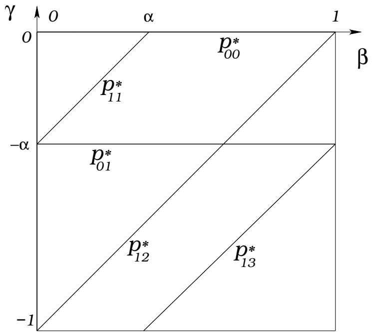
Combien y-a-t-il de mots de rotation dont l'intervalle $\alpha$ est fixé ?

## Réponse [Cassaigne, Frid, 2007]

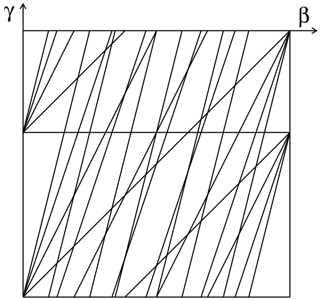
On sait combien il y a de faces dans l'image duale. Pour les $\alpha$ proches de $1/2$, cela suffit, pour d'autres $\alpha$, cela donne une borne supérieure.

# Dualité pour les mots de rotation



# Dualité pour les mots de rotation



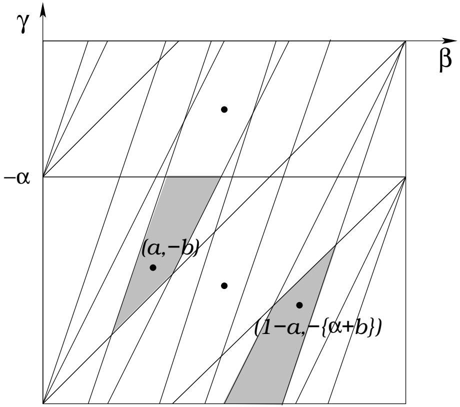
# Nombre de faces

Pour tout $\alpha$ irrationel, le nombre de faces de l'image d'ordre $n+1$ est

$$d_\alpha(n) = 2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + 2\sum_{p=1}^{n}(n-p+1)\varphi(p).$$

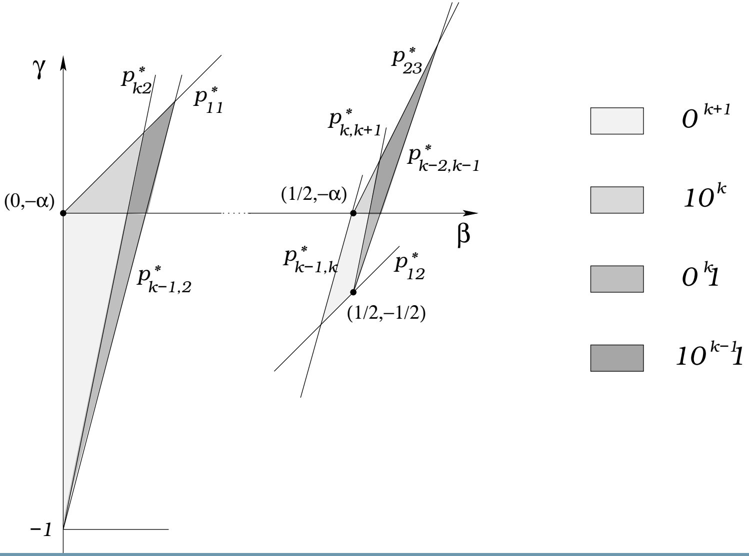
Ce n'est qu'une borne supérieure !

# Symétrie

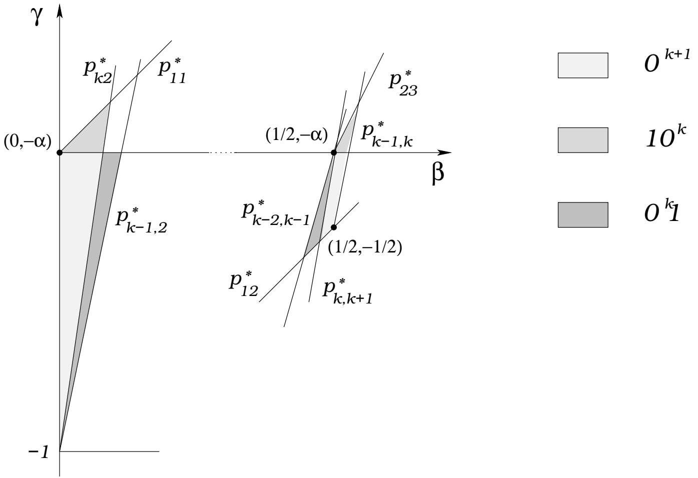



$$a_\alpha(n) \leq d_\alpha(n-1)/2 + 1 =: g(n).$$

Faces qui donnent des mots égaux, $k$ est impair



Faces qui donnent des mots égaux, $k$ est pair



# Formules précises

**Théorème [Cassaigne, F., 2007]**

Pour tout $\alpha \in (0,4;0,5)$ irrationel, $a_\alpha(1) = 2$, $a_\alpha(2) = 4$, $a_\alpha(3) = 8$, $a_\alpha(4) = 16$, $a_\alpha(5) = 30$ et

$$a_\alpha(n+1) = \begin{cases} g(n) - 4, n \text{ est impair}, \\ g(n) - 3, n \text{ est pair}. \end{cases}$$

$$g(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \sum_{p=1}^{n} (n-p+1)\varphi(p) + 2,$$

$$a_\alpha(n) = (1/6 + 1/\pi^2)n^3 + O(n^2 \log n).$$

# Formules précises

**Théorème [Cassaigne, F., 2007]**

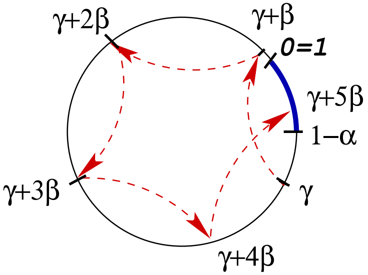
Pour tout $\alpha \in (1/3, 1/2)$ irrationel,

$$g(n) - a_\alpha(n+1) \leq Const.$$

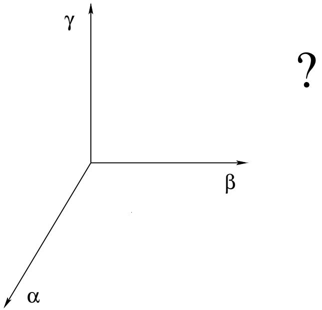
Et si $\alpha < 1/3$ ?..
C'est $\Theta(n^3)$ [Frid, 2005], mais...

## Question

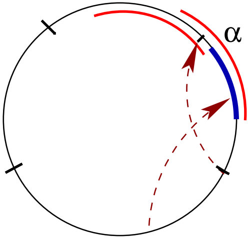
Combien y a-t-il de mots de rotation de longueur $n$ ?



Trois paramètres $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1)$. Faut-il dessiner une image tridimensionnelle ?



Par bonheur, NON. Il y a une autre méthode.




$$r_{k+1} = r_k + u_k - v_k\,,$$

où $u, v$ sont des mots sturmiens de même pente $\alpha$.

[Berstel, Vuillon 2002] (pour plus d'intervalles aussi).

# La borne supérieure

$$\begin{aligned} f(n+1) &\leq \#\{(u,v) | u,v \in St(n,\alpha), \alpha \in (0,1/2), u \neq v\} + 2 \\ &= n(n+1) + \frac{1}{2}\sum_{p=3}^{n} \varphi(p)(n^2 - p^2 + n + p) \\ &= \frac{3n^4}{4\pi^2} + O(n^3 \log n). \end{aligned}$$

Le nombre de paires des mots sturmiens de même pente a été trouvé avec des résultats de [Berstel, Pocchiola, 1996].

Mais il y a des paires qui donnent la même chose !

# Cas 1

$$r_{k+1} = r_k + u_k - v_k\,,$$

$$\texttt{u=}\boxed{\quad\texttt{w}\quad}$$

$$\texttt{v=}\boxed{\quad\texttt{w}\quad}$$

$$\texttt{r=}\boxed{\texttt{0 0 ... 0}}\texttt{0}$$

or

$$\texttt{r=}\boxed{\texttt{1 1 ... 1}}\texttt{1}$$

Déjà exclus car on pose $u \neq v$.

# Cas 2

$$r_{k+1} = r_k + u_k - v_k,$$

$$\begin{array}{ll} u= & \boxed{\;s\;}\;\; 1\;0 \;\;\boxed{\quad\; p \quad\;} \\ v= & \boxed{\;s\;}\;\; 0\;1 \;\;\boxed{\quad\; p \quad\;} \end{array}$$

r= 0..0 1 0 ... 0 0 0 0

or

$$\begin{array}{ll} u= & \boxed{\;s\;}\;\; 0\;1 \;\;\boxed{\quad\; p \quad\;} \\ v= & \boxed{\;s\;}\;\; 1\;0 \;\;\boxed{\quad\; p \quad\;} \end{array}$$

r= 1..1 0 1 ... 1 1 1 1

$O(n^3)$ mots exclus.

# Cas 3

$$r_{k+1} = r_k + u_k - v_k,$$

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **u=** | ... | $\boxed{c}$ | 1 | 0 | $\boxed{c}$ | 1 | 0 | $\boxed{c}$ | 1 | 0 | ... |
| **v=** | ... | $\boxed{c}$ | 0 | 1 | $\boxed{c}$ | 0 | 1 | $\boxed{c}$ | 0 | 1 | ... |
| **r=** | ... | $\boxed{0..0}$ | 1 | 0 | $\boxed{0..0}$ | 1 | 0 | $\boxed{0..0}$ | 1 | 0 | ... |

Encore $O(n^3)$ mots exclus.

Tous les mots qui apparaissent plusieurs fois sont

$$0^{k_1}1(0^l1)^m0^{k_2}.$$

Ils sont fort liés avec les mots sturmiens *centraux* de longueur $l - 1$.

### Théorème [F., Jamet, 2013]

Pour tout $n = 3$, le nombre de mots de rotation de longueur $n+1$ est

$$f(n+1) = n^2 + 3n + 4 + \frac{1}{2}\sum_{p=3}^{n} \varphi(p)(n^2 - p^2 + n + p) - f_1(n) - 2\sum_{l=2}^{n-1} f_2(n,l),$$

où

$$f_1(n) = \begin{cases} 2\sum_{i=k}^{2k}\sum_{p=1}^{i+1}\varphi(p), & \text{if } n = 2k+1, \\ 2\sum_{i=k}^{2k-1}\sum_{p=1}^{i+1}\varphi(p) + \sum_{p=1}^{k}\varphi(p), & \text{if } n = 2k, \end{cases}$$

$$g(n,l) = n - l + 1 + (n \bmod (l+1)),$$

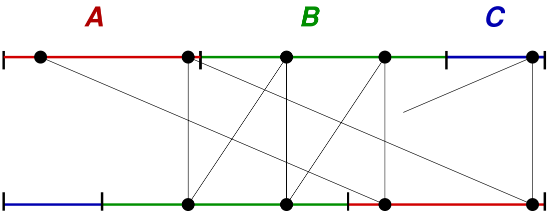
$$h(n,l) = \min(l+1, n-l),$$

$$f_2(n,l) = \left(\frac{1}{2}\left\lfloor\frac{n}{l+1}\right\rfloor g(n,l) - h(n,l)\right)(\varphi(l+1) - 1) + h(n,l)\left(\frac{\varphi(l+1)}{2} - 1\right).$$

# Valeurs

| $n$ | 6 | 7 | 10 | 15 | 20 | 50 | 75 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(n)$ | 64 | 112 | 504 | 2804 | 9442 | 423814 | 2222984 | 7155096 |
| $\frac{4\pi^2 f(n)}{3n^4} \approx$ | 0.65 | 0.61 | 0.66 | 0.73 | 0.78 | 0.89 | 0.92 | 0.94 |

Echange de 3 intervalles ( avec P. Ambrož, Z. Masáková, E. Pelantová, 2011 ) :

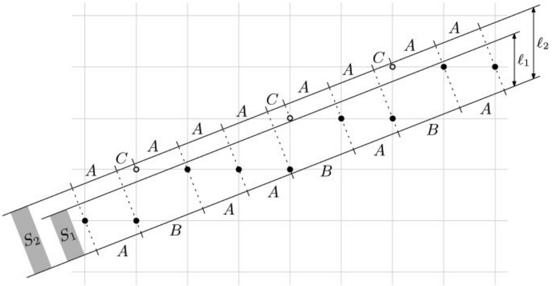



$w = ABBAC\cdots$

**Théorème [AFMP, 2011]**

$$\frac{1}{3\pi^2} + o(1) \leq \#\mathrm{3iet}(N)/N^4 \leq \frac{2}{\pi^2} + o(1).$$

Echange de 3 intervalles ( avec P. Ambrož, Z. Masáková, E. Pelantová, 2011 ) :




### Hypothèse

$$\frac{\#3\mathrm{iet}(N)}{N^4}\pi^2 = \frac{3}{4} + o(1).$$