Théorie de Galois des équations différentielles et aux différences. Applications

Thierry COMBOT

IMCCE, Observatoire de Paris

7 décembre 2012

Définition

On dit que $(\mathbb{K}, \partial)$ *est un corps différentiel si*

$$\forall f, g \in \mathbb{K}, \;\; \partial(fg) = \partial f g + f \partial g$$

(∂ est une dérivation) et $f \in \mathbb{K} \Rightarrow \partial f \in \mathbb{K}$. *On appelle l'ensemble des solutions de l'équation* $\partial f = 0$ *le corps des constantes* $\mathbb{K}_0$.

Dans toute la suite, on supposera toujours que le corps des constantes $\mathbb{K}_0$ est algébriquement clos.

Définition

Soit $E \in \mathbb{K}[\partial]$ un opérateur différentiel d'ordre n. On considère le corps

$$L = \mathbb{K}(R_{1,1}(t), \ldots, R_{n,n}(t))$$

où R est la matrice résolvante de L. Alors L est un corps différentiel, appelé corps de Picard-Vessiot de E.

Définition

Soit $E \in \mathbb{K}[\partial]$ un opérateur différentiel d'ordre n et L son corps de Picard-Vessiot. Le groupe de Galois de E est le sous groupe de $Aut_{diff}(L)$ stabilisant $\mathbb{K}$.

Notant V l'espace vectoriel des solutions de E, on remarque que tout élément σ du groupe de Galois E envoie les éléments de V dans V.
Donc $\mathrm{Gal}_{\mathrm{diff}}(E) \subset GL(V)$.

Proposition

Soit $E \in \mathbb{K}[\partial]$ un opérateur différentiel d'ordre n, R sa matrice résolvante et V un espace vectoriel de solution. On note

$$Inv = \{P \in \mathbb{K}[u_{1,1}, \ldots, u_{n,n}, (det\mathbf{u})^{-1}], P(R(t)) = 0\}$$

Alors

$$Gal_{diff}(E) = \{\sigma \in GL_n(\mathbb{K}_0), \forall P \in Inv, \quad P(\sigma R(t)) = 0)\}$$

Théorème

Le groupe de Galois $Gal_{diff}(E)$ est un sous groupe de Lie de $GL_n(\mathbb{K}_0)$.

Exemple

$$ty'' + y' = 0$$

Une base de solution est donnée par $\ln t, 1$. On a

$$\sigma(1) = 1 \qquad \sigma(\ln t)' = \sigma(1/t) = 1/t \Rightarrow \sigma(\ln t) = \ln t$$

Donc

$$\mathrm{Gal}_{\mathrm{diff}}(E) \subset \{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; a \in \mathbb{C} \}$$

Le seul sous groupe de Lie ce groupe est $\{id\}$. Cela impliquerait que $\ln t$ soit rationnel, ce qui n'est pas le cas. Donc

$$\mathrm{Gal}_{\mathrm{diff}}(E) = \{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; a \in \mathbb{C} \}$$

Définition

Soit $E \in \mathbb{K}[\partial]$ un opérateur différentiel d'ordre n et R sa matrice résolvante. Soit γ un contour fermé de $\mathbb{C} \setminus D$ où D est l'ensemble des singularités de E. On note R_γ la matrice résolvante calculée le long de γ. Le groupe de monodromie est le groupe engendré par

$$Mon(E) = \{R_\gamma,\ \gamma \subset \mathbb{C} \setminus D,\ \gamma \text{ courbe fermée}\}$$

Définition

On dit que E est Fuchsien si en tout point $x \in \bar{\mathbb{C}}$, il existe une base de solution sous forme de séries convergentes dans $\mathbb{C}[[t^{\alpha_1}, \dots, t^{\alpha_k}, \ln t]]$ avec $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}_0$.

Théorème

Si E est Fuchsien, alors $Gal_{diff}(E)$ est la clôture de Zariski de $Mon(E)$.

Exemple $ty'' + y' = 0$. Cette équation est Fuchsienne. On a

$$\mathrm{Mon}(E) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ a \in 2i\pi\mathbb{Z} \right\}$$

Définition

Soit $u, v : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{K}_0$ une suite. On définit $\sim$ une relation d'équivalence telle que $u \sim v$ si $u_n - v_n \neq 0$ pour un nombre fini de $n \in \mathbb{N}$. On appelle germe de suites l'ensemble des suites quotienté par $\sim$.

Ici, K est un corps invariant par l'opérateur de décalage δ.

Proposition

Soit $E \in \mathbb{K}[\delta]$ d'ordre n. Alors il existe un espace de dimension n de germe de suite solutions de E.

Exemple $(n+2)^2(u_{n+2}-u_{n+1})-(n+1)^2(u_{n+1}-u_n)=0$. Une base de solution est donnée par

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2},\ 1$$

Le groupe de Galois est

$$\mathrm{Gal}_{\mathrm{diff}}(E)=\left\{\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ a\in\mathbb{C}\right\}$$

Définition

Soit K un corps différentiel (ou à décalage), et $K \subset L$ une extension. On dit que L est une extension Liouvillienne s'il existe une tour de corps $K = K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_p = l$ tel que $K_{i+1} = K_i(f)$ avec f algébrique sur K_i ou solution d'une équation différentielle (ou récurrence) d'ordre 1 non homogène à coefficients dans K_i.

Proposition

Soit K un corps à décalage. Si L est une extension algébrique de K, alors

$$\forall f \in L,\ \exists u_0, \dots, u_{k-1} \in K,\ \ \forall n,\ f_n = u_{n \bmod k}$$

Proposition

Un opérateur différentiel (ou récurrence) E a une base de solutions Liouvilliennes si et seulement si la composante de l'identité de $Gal(E)$ est résoluble.

Le fait que GL_n n'est pas simple implique l'existence d'un invariant pour toute équation. C'est le wronskien du système, qui satisfait un équation d'ordre 1. On peut toujours ainsi se ramener à $\mathrm{Gal}(E) \subset SL_n$.
Dans le cas différentiel $n = 2$, tous les sous groupes de Lie de $SL_2(\mathbb{C})$ sont connus. Ce sont

$$SL_2, D_\infty, \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbb{C}^*,$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} \xi & b \\ 0 & \xi^{-1} \end{pmatrix},\ \xi^p = 1 \right\}, A_4, S_4, A_5, D_k, \mathbb{Z}_k$$

Ils sont tous résolubles à l'exception de SL_2. Chaque cas (sauf SL_2) peut être testé par l'algorithme de Kovacic. Ainsi il est possible de calculer le groupe de Galois.

Il existe **en théorie** un algorithme permettant de le calculer pour tout n. En pratique possible seulement dans le cas connexe.

Théorème

Soit K un corps à décalage, E une récurrence. Alors $Gal_\delta(E)$ est une extension commutative de sa composante de l'identité.

Pour $n = 2$ cela implique que seuls

$$SL_2, \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbb{C}^*, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{C}^*, \mathbb{Z}_k$$

sont possibles.

Sachant que l'on connait une classification des algèbres de Lie simples, on en déduit une classification de tous les groupes de Galois possibles pour les récurrences.

$\Rightarrow$ Possibilité d'un algorithme valable pour tout ordre n.

Théorème

Soit K un corps à décalage, E une récurrence d'ordre k. Si E a une solution Liouvillienne, alors il existe $p \leq k$ et u solution de E tel que u_{np} soit hypergéométrique.

Exemple

$$\Gamma(n/2) + \Gamma(n) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\Gamma(n)}$$

Ordre minimal de la récurrence associée: 4
Groupe de Galois

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Exemples de solutions Liouvilliennes

Groupes de Galois	Différentiel	Récurrence
$\mathrm{Gal}_{\mathrm{diff}}$ fini	$(\sqrt{1-t^2}-t)^{1/50}$	$2^{-n/2}(1+i)^n(n+2)/(n+7)$
$\mathrm{Gal}_{\mathrm{diff}}$ abélien	$(t^2-1)^{\sqrt{2}}$	$\sum_{j=1}^n j^{-2}$
$\mathrm{Gal}_{\mathrm{diff}}$ v. abélien	$\int t^{-1/3}(t^2-1)^{1/7}dt$	$\sum_{j=1}^n 2^{-j/2}(1+i)^j j^{-2}$
$\mathrm{Gal}_{\mathrm{diff}}$ v. résoluble	$alg(t)\int t^{-1}\int e^{-t^2}dt^2$	$\sum_{j=1}^n \Gamma(j/2)\sum_{l=1}^j \Gamma(l+1/3)$

Définition

Soit $E \in \mathbb{K}[\partial]$ un opérateur différentiel, z_1, z_2 deux points et B_1, B_2 des bases locales de solutions end z_1, z_2. En prolongeant les solutions B_1 par prolongement analytique jusqu'à un voisinage de z_2, on obtient $B_2 = AB_1$ où $A \in M_n(\mathbb{C})$ est appelé matrice de transfert.

La matrice de transfert permet de connaitre le comportement en z_2 d'une solution de E donnée par des conditions initiales en z_1.
Si toutes les matrices de transfert sont connues, alors on peut calculer le groupe de monodromie.

Théorème

Soit $E \in \mathbb{K}[\delta]$ un opérateur de récurrence d'ordre p. Alors les solution de E ont un développement asymptotique de la forme

$$u_n = \sum_{j=1}^{p} c_j n!^{q_j} \alpha_j^n e^{\sum_{k=1}^{p-1} \beta_{k,j} n^{k/p}} n^{\gamma_j} (\ln n)^{\epsilon_j} \left(1 + \frac{a_{1,j}}{n} + \frac{a_{2,j}}{n^2} + \dots\right)$$

Les constantes c_j dépendant des conditions initiales de la solution u_n

Définition

Soit $E \in \mathbb{R}[\delta]$ un opérateur de récurrence d'ordre p sans singularité sur $\mathbb{N}$. Soit $f_1, \dots, f_p$ une base des développements asymptotiques des solutions de E. On appelle $C \in M_p(\mathbb{C})$ une matrice de connexion si elle est telle que

$$u_n = (f_1, \dots, f_p) C (u_0, \dots, u_p)^{\intercal}$$

On peut choisir les f_i dans l'ordre de comportement asymptotique décroissant, $\mid f_{i+1}/f_i \mid$ borné.

La matrice C n'est pas toujours uniquement définie. Exemple

$$f_1(n) = (n+1)!, \quad f_2(n) = 1$$

Si C est une matrice de connexion, alors $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} C$ l'est aussi.

Proposition

Soit $E \in \mathbb{R}[\delta]$ un opérateur de récurrence d'ordre p sans singularité sur $\mathbb{N}$. Soit $f_1, \dots, f_p$ une base des développements asymptotiques des solutions de E dans l'ordre décroissant. On considère une partition $S_1 = \{1, \dots, n_1\}, S_2 = \{n_1+1, \dots, n_2\}, \dots$ de $\{1, \dots, p\}$ tel que

$$\forall i, j \in S_k,\ \exists \alpha \in \mathbb{R},\ \ | \, n^\alpha f_{i+1}/f_i \, | \ \text{ borné}$$

Alors il existe une unique matrice de connexion C telle que triangulaire supérieure par blocs de tailles $n_{i+1} - n_i - 1$.

Idée: Décomposition LU par blocs.

Exemple

$$(n^2+4n+4)u_n+(-n^2-5n-5)u_{n+1}+(n+1)un+2=0$$

$$u_n=-u_1+2u_0+(u_1-u_0)(n+1)!$$

On a $f_1(n)=n!n(1+1/n),\ f_2(n)=1$ et

$$u_n=(f_1,f_2)\left(\begin{array}{cc}-1 & 1\\ 0 & 1\end{array}\right)(u_0,u_1)^\intercal$$

L'élément en bas à gauche peut être arbitraire, cela ne change pas le développement asymptotique.

Proposition

Soit $E \in \mathbb{Q}[\delta]$ un opérateur de récurrence d'ordre p sans singularité sur $\mathbb{N}$. Soit C la matrice de connexion de E. Alors $c_{1,1}, \dots, c_{p,p}$ sont algébriquement liés.

Idée: Tout groupe de Galois possède au moins un invariant, car $GL_p(\mathbb{C})$ n'est pas simple.
Cet invariant est le wronskien, qui est solution d'une récurrence d'ordre 1. Cela donne une relation sur les solutions de E, qui passe à la limite, donnant une relation algébrique sur les $c_{1,1}, \dots, c_{p,p}$.

Exemple

$$(n+3)(n+2)(n+1)u_n-(n+3)(2n^2+6n+5)u_{n+1}+(n+2)^3u_{n+2}=0$$

Asymptotique

$$f_1=n+1 \quad f_2=1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{3n^2}+O(n^{-3})$$

Notant R_n la résolvante du système matriciel associé, on a

$$\det=\frac{n+2}{2(n+1)}$$

donc

$$\lim_{n\to\infty}\det\left(\begin{pmatrix} f_1(n) & f_2(n) \\ f_1(n+1) & f_2(n+1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2}\end{pmatrix}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2(n+1)}$$

$$\Rightarrow c_{2,1}c_{1,2}-c_{2,2}c_{1,1}=1/2$$

Proposition

Soit $E \in \mathbb{K}[\delta]$ un opérateur de récurrence d'ordre p possédant une base de solutions Liouvilliennes. Alors les solution de E ont un développement asymptotique de la forme

$$u_n = \sum_{j=1}^{p} c_j n!^{q_j} \alpha_j^n n^{\gamma_j} (\ln n)^{\epsilon_j} \left(1 + \frac{a_{1,j}}{n} + \frac{a_{2,j}}{n^2} + \dots\right)$$

Dans le cas différentiel, tout est possible: Pour toute solution f d'une équation différentielle, tout point z et tout ordre p, il existe une fonction Liouvillienne ayant un développement en série en z coïncidant avec f à l'ordre p.

Coefficients des matrices de transferts entre deux points de $\mathbb{K}_0 = \bar{\mathbb{Q}}$.

Groupes de Galois $\mathrm{Gal}_{\mathrm{diff}}$ fini	Constantes de connexions $\bar{\mathbb{Q}}$
$\mathrm{Gal}_{\mathrm{diff}}$ abélien	$\bar{\mathbb{Q}}, e^{\bar{\mathbb{Q}}}, \bar{\mathbb{Q}}^{\bar{\mathbb{Q}}}$
$\mathrm{Gal}_{\mathrm{diff}}$ virtuellement abélien	$\exp(\int alg(t)dt)$
$\mathrm{Gal}_{\mathrm{diff}}$ triangulaire, v.p racines de l'unité	Périodes
$\mathrm{Gal}_{\mathrm{diff}}$ virtuellement résoluble	Périodes exponentielles
$\dim(\mathrm{Gal}_{\mathrm{diff}}) = p^2 - j$	Au moins j relations algébriques

Coefficients des matrices de connexions $\mathbb{K}_0 = \bar{\mathbb{Q}}$.

Groupes de Galois $\mathrm{Gal}_{\mathrm{diff}}$ fini	Constantes de connexions $\bar{\mathbb{Q}}$
$\mathrm{Gal}_{\mathrm{diff}}$ abélien	$\bar{\mathbb{Q}}, \Gamma^{(k)}(\bar{\mathbb{Q}})$
$\mathrm{Gal}_{\mathrm{diff}}$ virtuellement abélien	$\bar{\mathbb{Q}}, \Gamma^{(k)}(\bar{\mathbb{Q}})$
$\mathrm{Gal}_{\mathrm{diff}}$ triangulaire, v.p racines de l'unité	MultiZetas, etc...
$\mathrm{Gal}_{\mathrm{diff}}$ virtuellement résoluble	MeijerG($\bar{\mathbb{Q}}$)
$\dim(\mathrm{Gal}_{\mathrm{diff}}) = p^2 - j$	Au moins j relations algébriques