Sur le plongement du complété d'un espace normé dans son complété pour une autre norme

Laurent Poinsot

LIPN UMR 7030 - Université Paris 13 - Institut Galilée

CIP

Sommaire de la présentation

1. Présentation du problème
2. Quelques rappels utiles
3. La bonne hypothèse ?
4. Preuve

Sommaire de la présentation

1. Présentation du problème
2. Quelques rappels utiles
3. La bonne hypothèse ?
4. Preuve

Sommaire de la présentation

1. Présentation du problème
2. Quelques rappels utiles
3. La bonne hypothèse ?
4. Preuve

Sommaire de la présentation

1. Présentation du problème
2. Quelques rappels utiles
3. La bonne hypothèse ?
4. Preuve

Présentation du problème

Soit E un espace vectoriel (complexe ou réel) normé pour deux normes p, q. On note E_p, E_q l'espace E muni de la norme adéquate. On suppose que q est *plus forte* que p, *i.e.*, quel que soit $x \in E$, $p(x) \leq q(x)$ (on note cela $p \leq q$). (C'est une hypothèse qui apparaît assez naturellement dans l'étude des espaces de Fréchet.) Soient $\widehat{E}_p, \widehat{E}_q$ les espaces de Banach, complétés des espaces normés E_p, E_q. L'application identité $i_{pq} : E_q \to E_p$ est continue (par l'hypothèse sur les normes). Elle s'étend donc, par uniforme continuité, aux Banach $\widehat{i}_{pq} : \widehat{E}_q \to \widehat{E}_p$. Contrairement à i_{pq}, l'application $\widehat{i}_{pq}$ n'est pas nécessairement injective (ni même surjective). On se pose alors la question suivante : sous quelle condition $\widehat{E}_q$ se plonge-t-il (continûment) dans $\widehat{E}_p$? En d'autres termes, quelle propriété doit être satisfaite pour que $\widehat{i}_{pq}$ soit injective ?

Présentation du problème

Soit E un espace vectoriel (complexe ou réel) normé pour deux normes p, q. On note E_p, E_q l'espace E muni de la norme adéquate. On suppose que q est *plus forte* que p, *i.e.*, quel que soit $x \in E$, $p(x) \leq q(x)$ (on note cela $p \leq q$). (C'est une hypothèse qui apparaît assez naturellement dans l'étude des espaces de Fréchet.) Soient $\widehat{E}_p, \widehat{E}_q$ les espaces de Banach, complétés des espaces normés E_p, E_q. L'application identité $i_{pq} : E_q \to E_p$ est continue (par l'hypothèse sur les normes). Elle s'étend donc, par uniforme continuité, aux Banach $\widehat{i}_{pq} : \widehat{E}_q \to \widehat{E}_p$. Contrairement à i_{pq}, l'application $\widehat{i}_{pq}$ n'est pas nécessairement injective (ni même surjective). On se pose alors la question suivante : sous quelle condition $\widehat{E}_q$ se plonge-t-il (continûment) dans $\widehat{E}_p$? En d'autres termes, quelle propriété doit être satisfaite pour que $\widehat{i}_{pq}$ soit injective ?

Présentation du problème

Soit E un espace vectoriel (complexe ou réel) normé pour deux normes p, q. On note E_p, E_q l'espace E muni de la norme adéquate. On suppose que q est *plus forte* que p, *i.e.*, quel que soit $x \in E$, $p(x) \leq q(x)$ (on note cela $p \leq q$). (C'est une hypothèse qui apparaît assez naturellement dans l'étude des espaces de Fréchet.) Soient $\widehat{E}_p, \widehat{E}_q$ les espaces de Banach, complétés des espaces normés E_p, E_q. L'application identité $i_{pq} : E_q \to E_p$ est continue (par l'hypothèse sur les normes). Elle s'étend donc, par uniforme continuité, aux Banach $\widehat{i}_{pq} : \widehat{E}_q \to \widehat{E}_p$. Contrairement à i_{pq}, l'application $\widehat{i}_{pq}$ n'est pas nécessairement injective (ni même surjective). On se pose alors la question suivante : sous quelle condition $\widehat{E}_q$ se plonge-t-il (continûment) dans $\widehat{E}_p$? En d'autres termes, quelle propriété doit être satisfaite pour que $\widehat{i}_{pq}$ soit injective ?

Présentation du problème

Soit E un espace vectoriel (complexe ou réel) normé pour deux normes p, q. On note E_p, E_q l'espace E muni de la norme adéquate. On suppose que q est *plus forte* que p, *i.e.*, quel que soit $x \in E$, $p(x) \leq q(x)$ (on note cela $p \leq q$). (C'est une hypothèse qui apparaît assez naturellement dans l'étude des espaces de Fréchet.) Soient $\widehat{E}_p, \widehat{E}_q$ les espaces de Banach, complétés des espaces normés E_p, E_q. L'application identité $i_{pq} : E_q \to E_p$ est continue (par l'hypothèse sur les normes). Elle s'étend donc, par uniforme continuité, aux Banach $\widehat{i}_{pq} : \widehat{E}_q \to \widehat{E}_p$. Contrairement à i_{pq}, l'application $\widehat{i}_{pq}$ n'est pas nécessairement injective (ni même surjective). On se pose alors la question suivante : sous quelle condition $\widehat{E}_q$ se plonge-t-il (continûment) dans E_p ? En d'autres termes, quelle propriété doit être satisfaite pour que $\widehat{i}_{pq}$ soit injective ?

Présentation du problème

Soit E un espace vectoriel (complexe ou réel) normé pour deux normes p, q. On note E_p, E_q l'espace E muni de la norme adéquate. On suppose que q est *plus forte* que p, *i.e.*, quel que soit $x \in E$, $p(x) \leq q(x)$ (on note cela $p \leq q$). (C'est une hypothèse qui apparaît assez naturellement dans l'étude des espaces de Fréchet.) Soient $\widehat{E}_p, \widehat{E}_q$ les espaces de Banach, complétés des espaces normés E_p, E_q. L'application identité $i_{pq} : E_q \to E_p$ est continue (par l'hypothèse sur les normes). Elle s'étend donc, par uniforme continuité, aux Banach $\widehat{i}_{pq} : \widehat{E}_q \to \widehat{E}_p$. Contrairement à i_{pq}, l'application $\widehat{i}_{pq}$ n'est pas nécessairement injective (ni même surjective). On se pose alors la question suivante : sous quelle condition $\widehat{E}_q$ se plonge-t-il (continûment) dans $\widehat{E}_p$? En d'autres termes, quelle propriété doit être satisfaite pour que $\widehat{i}_{pq}$ soit injective ?

Présentation du problème

Soit E un espace vectoriel (complexe ou réel) normé pour deux normes p, q. On note E_p, E_q l'espace E muni de la norme adéquate. On suppose que q est *plus forte* que p, *i.e.*, quel que soit $x \in E$, $p(x) \leq q(x)$ (on note cela $p \leq q$). (C'est une hypothèse qui apparaît assez naturellement dans l'étude des espaces de Fréchet.) Soient $\widehat{E}_p, \widehat{E}_q$ les espaces de Banach, complétés des espaces normés E_p, E_q. L'application identité $i_{pq} : E_q \to E_p$ est continue (par l'hypothèse sur les normes). Elle s'étend donc, par uniforme continuité, aux Banach $\widehat{i}_{pq} : \widehat{E}_q \to \widehat{E}_p$. Contrairement à i_{pq}, l'application $\widehat{i}_{pq}$ n'est pas nécessairement injective (ni même surjective). On se pose alors la question suivante : sous quelle condition $\widehat{E}_q$ se plonge-t-il (continûment) dans $\widehat{E}_p$? En d'autres termes, quelle propriété doit être satisfaite pour que $\widehat{i}_{pq}$ soit injective ?

Présentation du problème

Soit E un espace vectoriel (complexe ou réel) normé pour deux normes p, q. On note E_p, E_q l'espace E muni de la norme adéquate. On suppose que q est *plus forte* que p, *i.e.*, quel que soit $x \in E$, $p(x) \leq q(x)$ (on note cela $p \leq q$). (C'est une hypothèse qui apparaît assez naturellement dans l'étude des espaces de Fréchet.) Soient $\widehat{E}_p, \widehat{E}_q$ les espaces de Banach, complétés des espaces normés E_p, E_q. L'application identité $i_{pq} : E_q \to E_p$ est continue (par l'hypothèse sur les normes). Elle s'étend donc, par uniforme continuité, aux Banach $\widehat{i}_{pq} : \widehat{E}_q \to \widehat{E}_p$. Contrairement à i_{pq}, l'application $\widehat{i}_{pq}$ n'est pas nécessairement injective (ni même surjective). On se pose alors la question suivante : sous quelle condition $\widehat{E}_q$ se plonge-t-il (continûment) dans $\widehat{E}_p$? En d'autres termes, quelle propriété doit être satisfaite pour que $\widehat{i}_{pq}$ soit injective ?

Présentation du problème

Soit E un espace vectoriel (complexe ou réel) normé pour deux normes p, q. On note E_p, E_q l'espace E muni de la norme adéquate. On suppose que q est *plus forte* que p, *i.e.*, quel que soit $x \in E$, $p(x) \leq q(x)$ (on note cela $p \leq q$). (C'est une hypothèse qui apparaît assez naturellement dans l'étude des espaces de Fréchet.) Soient $\widehat{E}_p, \widehat{E}_q$ les espaces de Banach, complétés des espaces normés E_p, E_q. L'application identité $i_{pq} \colon E_q \to E_p$ est continue (par l'hypothèse sur les normes). Elle s'étend donc, par uniforme continuité, aux Banach $\widehat{i}_{pq} \colon \widehat{E}_q \to \widehat{E}_p$. Contrairement à i_{pq}, l'application $\widehat{i}_{pq}$ n'est pas nécessairement injective (ni même surjective). On se pose alors la question suivante : sous quelle condition $\widehat{E}_q$ se plonge-t-il (continûment) dans $\widehat{E}_p$? En d'autres termes, quelle propriété doit être satisfaite pour que $\widehat{i}_{pq}$ soit injective ?

Présentation du problème

Soit E un espace vectoriel (complexe ou réel) normé pour deux normes p, q. On note E_p, E_q l'espace E muni de la norme adéquate. On suppose que q est *plus forte* que p, *i.e.*, quel que soit $x \in E$, $p(x) \leq q(x)$ (on note cela $p \leq q$). (C'est une hypothèse qui apparaît assez naturellement dans l'étude des espaces de Fréchet.) Soient $\widehat{E}_p, \widehat{E}_q$ les espaces de Banach, complétés des espaces normés E_p, E_q. L'application identité $i_{pq} : E_q \to E_p$ est continue (par l'hypothèse sur les normes). Elle s'étend donc, par uniforme continuité, aux Banach $\widehat{i}_{pq} : \widehat{E}_q \to \widehat{E}_p$. Contrairement à i_{pq}, l'application $\widehat{i}_{pq}$ n'est pas nécessairement injective (ni même surjective). On se pose alors la question suivante : sous quelle condition $\widehat{E}_q$ se plonge-t-il (continûment) dans E_p ? En d'autres termes, quelle propriété doit être satisfaite pour que $\widehat{i}_{pq}$ soit injective ?

Présentation du problème

Soit E un espace vectoriel (complexe ou réel) normé pour deux normes p, q. On note E_p, E_q l'espace E muni de la norme adéquate. On suppose que q est *plus forte* que p, *i.e.*, quel que soit $x \in E$, $p(x) \leq q(x)$ (on note cela $p \leq q$). (C'est une hypothèse qui apparaît assez naturellement dans l'étude des espaces de Fréchet.) Soient $\widehat{E}_p, \widehat{E}_q$ les espaces de Banach, complétés des espaces normés E_p, E_q. L'application identité $i_{pq} \colon E_q \to E_p$ est continue (par l'hypothèse sur les normes). Elle s'étend donc, par uniforme continuité, aux Banach $\widehat{i}_{pq} \colon \widehat{E}_q \to \widehat{E}_p$. Contrairement à i_{pq}, l'application $\widehat{i}_{pq}$ n'est pas nécessairement injective (ni même surjective). On se pose alors la question suivante : sous quelle condition $\widehat{E}_q$ se plonge-t-il (continûment) dans E_p ? En d'autres termes, quelle propriété doit être satisfaite pour que $\widehat{i}_{pq}$ soit injective ?

Présentation du problème

Soit E un espace vectoriel (complexe ou réel) normé pour deux normes p, q. On note E_p, E_q l'espace E muni de la norme adéquate. On suppose que q est *plus forte* que p, *i.e.*, quel que soit $x \in E$, $p(x) \leq q(x)$ (on note cela $p \leq q$). (C'est une hypothèse qui apparaît assez naturellement dans l'étude des espaces de Fréchet.) Soient $\widehat{E}_p, \widehat{E}_q$ les espaces de Banach, complétés des espaces normés E_p, E_q. L'application identité $i_{pq} \colon E_q \to E_p$ est continue (par l'hypothèse sur les normes). Elle s'étend donc, par uniforme continuité, aux Banach $\widehat{i}_{pq} \colon \widehat{E}_q \to \widehat{E}_p$. Contrairement à i_{pq}, l'application $\widehat{i}_{pq}$ n'est pas nécessairement injective (ni même surjective). On se pose alors la question suivante : sous quelle condition $\widehat{E}_q$ se plonge-t-il (continûment) dans E_p ? En d'autres termes, quelle propriété doit être satisfaite pour que $\widehat{i}_{pq}$ soit injective ?

Présentation du problème

Soit E un espace vectoriel (complexe ou réel) normé pour deux normes p, q. On note E_p, E_q l'espace E muni de la norme adéquate. On suppose que q est *plus forte* que p, *i.e.*, quel que soit $x \in E$, $p(x) \leq q(x)$ (on note cela $p \leq q$). (C'est une hypothèse qui apparaît assez naturellement dans l'étude des espaces de Fréchet.) Soient $\widehat{E}_p, \widehat{E}_q$ les espaces de Banach, complétés des espaces normés E_p, E_q. L'application identité $i_{pq} \colon E_q \to E_p$ est continue (par l'hypothèse sur les normes). Elle s'étend donc, par uniforme continuité, aux Banach $\widehat{i}_{pq} \colon \widehat{E}_q \to \widehat{E}_p$. Contrairement à i_{pq}, l'application $\widehat{i}_{pq}$ n'est pas nécessairement injective (ni même surjective). On se pose alors la question suivante : sous quelle condition $\widehat{E}_q$ se plonge-t-il (continûment) dans E_p ? En d'autres termes, quelle propriété doit être satisfaite pour que $\widehat{i}_{pq}$ soit injective ?

Présentation du problème

Soit E un espace vectoriel (complexe ou réel) normé pour deux normes p, q. On note E_p, E_q l'espace E muni de la norme adéquate. On suppose que q est *plus forte* que p, *i.e.*, quel que soit $x \in E$, $p(x) \leq q(x)$ (on note cela $p \leq q$). (C'est une hypothèse qui apparaît assez naturellement dans l'étude des espaces de Fréchet.) Soient $\widehat{E}_p, \widehat{E}_q$ les espaces de Banach, complétés des espaces normés E_p, E_q. L'application identité $i_{pq} : E_q \to E_p$ est continue (par l'hypothèse sur les normes). Elle s'étend donc, par uniforme continuité, aux Banach $\widehat{i}_{pq} : \widehat{E}_q \to \widehat{E}_p$. Contrairement à i_{pq}, l'application $\widehat{i}_{pq}$ n'est pas nécessairement injective (ni même surjective). On se pose alors la question suivante : sous quelle condition $\widehat{E}_q$ se plonge-t-il (continûment) dans E_p ? En d'autres termes, quelle propriété doit être satisfaite pour que $\widehat{i}_{pq}$ soit injective ?

Évacuons immédiatement la situation (triviale) suivante. Supposons que E soit un espace de Banach pour les deux normes p, q telles que $p \leq q$. Alors le théorème de l'application ouverte, appliqué à l'application identique de E, implique que les deux normes sont équivalentes, c'est-à-dire que l'on peut trouver un réel $C > 0$ tel que quel que soit $x \in E$, $Cq(x) \leq p(x) \leq q(x)$. Par conséquent le problème précédent n'est intéressant que si E n'est complet pas pour les deux normes simultanément.

Évacuons immédiatement la situation (triviale) suivante. Supposons que E soit un espace de Banach pour les deux normes p, q telles que $p \leq q$. Alors le théorème de l'application ouverte, appliqué à l'application identique de E, implique que les deux normes sont équivalentes, c'est-à-dire que l'on peut trouver un réel $C > 0$ tel que quel que soit $x \in E$, $Cq(x) \leq p(x) \leq q(x)$. Par conséquent le problème précédent n'est intéressant que si E n'est complet pas pour les deux normes simultanément.

Évacuons immédiatement la situation (triviale) suivante. Supposons que E soit un espace de Banach pour les deux normes p, q telles que $p \leq q$. Alors le théorème de l'application ouverte, appliqué à l'application identique de E, implique que les deux normes sont équivalentes, c'est-à-dire que l'on peut trouver un réel $C > 0$ tel que quel que soit $x \in E$, $Cq(x) \leq p(x) \leq q(x)$. Par conséquent le problème précédent n'est intéressant que si E n'est complet pas pour les deux normes simultanément.

Évacuons immédiatement la situation (triviale) suivante. Supposons que E soit un espace de Banach pour les deux normes p, q telles que $p \leq q$. Alors le théorème de l'application ouverte, appliqué à l'application identique de E, implique que les deux normes sont équivalentes, c'est-à-dire que l'on peut trouver un réel $C > 0$ tel que quel que soit $x \in E$, $Cq(x) \leq p(x) \leq q(x)$. Par conséquent le problème précédent n'est intéressant que si E n'est complet pas pour les deux normes simultanément.

Évacuons immédiatement la situation (triviale) suivante. Supposons que E soit un espace de Banach pour les deux normes p, q telles que $p \leq q$. Alors le théorème de l'application ouverte, appliqué à l'application identique de E, implique que les deux normes sont équivalentes, c'est-à-dire que l'on peut trouver un réel $C > 0$ tel que quel que soit $x \in E$, $Cq(x) \leq p(x) \leq q(x)$. Par conséquent le problème précédent n'est intéressant que si E n'est complet pas pour les deux normes simultanément.

Exemples

1. Soit $\mathcal{P}$ l'espace des fonctions (d'une variable réelle) polynomiales complexes, avec les normes $p(P) = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|$ et $q(P) = \sup_{x \in [0,1]} \max\{|P(x)|, |P'(x)|\}$. Le théorème de Stone-Weiertraß implique que le complété de $\mathcal{P}_p$ est $\mathcal{C}^0([0,1])$, alors que celui de $\mathcal{P}_q$ est $\mathcal{C}^1([0,1])$. Dans ce cas, l'application $\widehat{i}_{pq}$ est l'inclusion canonique ;
2. Si $q(P) = \sup_{x \in [0,2]} |P(x)|$, alors $\widehat{\mathcal{P}}_q$ est $\mathcal{C}^0([0,2])$, et $\widehat{i}_{pq}$ est surjective (c'est la restriction) mais non injective ;
3. Si $q(P) = \sup_{x \in [0,2]} \max\{|P(x)|, |P'(x)|\}$, alors $\widehat{\mathcal{P}}_q = \mathcal{C}^1([0,2])$, et $\widehat{i}_{pq}$ (encore la restriction) n'est ni injective ni surjective.

Exemples

1. Soit $\mathcal{P}$ l'espace des fonctions (d'une variable réelle) polynomiales complexes, avec les normes $p(P) = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$ et $q(P) = \sup_{x\in[0,1]} \max\{|P(x)|, |P'(x)|\}$. Le théorème de Stone-Weiertraß implique que le complété de $\mathcal{P}_p$ est $\mathcal{C}^0([0,1])$, alors que celui de $\mathcal{P}_q$ est $\mathcal{C}^1([0,1])$. Dans ce cas, l'application $\widehat{i_{pq}}$ est l'inclusion canonique ;
2. Si $q(P) = \sup_{x\in[0,2]} |P(x)|$, alors $\widehat{\mathcal{P}_q}$ est $\mathcal{C}^0([0,2])$, et $\widehat{i_{pq}}$ est surjective (c'est la restriction) mais non injective ;
3. Si $q(P) = \sup_{x\in[0,2]} \max\{|P(x)|, |P'(x)|\}$, alors $\widehat{\mathcal{P}_q} = \mathcal{C}^1([0,2])$, et $\widehat{i_{pq}}$ (encore la restriction) n'est ni injective ni surjective.

Exemples

1. Soit $\mathcal{P}$ l'espace des fonctions (d'une variable réelle) polynomiales complexes, avec les normes $p(P) = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$ et $q(P) = \sup_{x\in[0,1]} \max\{|P(x)|, |P'(x)|\}$. Le théorème de Stone-Weiertraß implique que le complété de $\mathcal{P}_p$ est $\mathcal{C}^0([0,1])$, alors que celui de $\mathcal{P}_q$ est $\mathcal{C}^1([0,1])$. Dans ce cas, l'application $\widehat{i}_{pq}$ est l'inclusion canonique ;
2. Si $q(P) = \sup_{x\in[0,2]} |P(x)|$, alors $\widehat{\mathcal{P}}_q$ est $\mathcal{C}^0([0,2])$, et $\widehat{i}_{pq}$ est surjective (c'est la restriction) mais non injective ;
3. Si $q(P) = \sup_{x\in[0,2]} \max\{|P(x)|, |P'(x)|\}$, alors $\widehat{\mathcal{P}}_q = \mathcal{C}^1([0,2])$, et $\widehat{i}_{pq}$ (encore la restriction) n'est ni injective ni surjective.

Exemples

1. Soit $\mathcal{P}$ l'espace des fonctions (d'une variable réelle) polynomiales complexes, avec les normes $p(P) = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$ et $q(P) = \sup_{x\in[0,1]} \max\{|P(x)|, |P'(x)|\}$. Le théorème de Stone-Weiertraß implique que le complété de $\mathcal{P}_p$ est $\mathcal{C}^0([0,1])$, alors que celui de $\mathcal{P}_q$ est $\mathcal{C}^1([0,1])$. Dans ce cas, l'application $\widehat{i}_{pq}$ est l'inclusion canonique ;
2. Si $q(P) = \sup_{x\in[0,2]} |P(x)|$, alors $\widehat{\mathcal{P}}_q$ est $\mathcal{C}^0([0,2])$, et $\widehat{i}_{pq}$ est surjective (c'est la restriction) mais non injective ;
3. Si $q(P) = \sup_{x\in[0,2]} \max\{|P(x)|, |P'(x)|\}$, alors $\widehat{\mathcal{P}}_q = \mathcal{C}^1([0,2])$, et $\widehat{i}_{pq}$ (encore la restriction) n'est ni injective ni surjective.

Exemples

1. Soit $\mathcal{P}$ l'espace des fonctions (d'une variable réelle) polynomiales complexes, avec les normes $p(P) = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$ et $q(P) = \sup_{x\in[0,1]} \max\{|P(x)|, |P'(x)|\}$. Le théorème de Stone-Weiertraß implique que le complété de $\mathcal{P}_p$ est $\mathcal{C}^0([0,1])$, alors que celui de $\mathcal{P}_q$ est $\mathcal{C}^1([0,1])$. Dans ce cas, l'application $\widehat{i_{pq}}$ est l'inclusion canonique ;
2. Si $q(P) = \sup_{x\in[0,2]} |P(x)|$, alors $\widehat{\mathcal{P}_q}$ est $\mathcal{C}^0([0,2])$, et $\widehat{i_{pq}}$ est surjective (c'est la restriction) mais non injective ;
3. Si $q(P) = \sup_{x\in[0,2]} \max\{|P(x)|, |P'(x)|\}$, alors $\widehat{\mathcal{P}_q} = \mathcal{C}^1([0,2])$, et $\widehat{i_{pq}}$ (encore la restriction) n'est ni injective ni surjective.

Exemples

1. Soit $\mathcal{P}$ l'espace des fonctions (d'une variable réelle) polynomiales complexes, avec les normes $p(P) = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$ et $q(P) = \sup_{x\in[0,1]} \max\{|P(x)|, |P'(x)|\}$. Le théorème de Stone-Weiertraß implique que le complété de $\mathcal{P}_p$ est $\mathcal{C}^0([0,1])$, alors que celui de $\mathcal{P}_q$ est $\mathcal{C}^1([0,1])$. Dans ce cas, l'application $\widehat{i_{pq}}$ est l'inclusion canonique ;
2. Si $q(P) = \sup_{x\in[0,2]} |P(x)|$, alors $\widehat{\mathcal{P}_q}$ est $\mathcal{C}^0([0,2])$, et $\widehat{i_{pq}}$ est surjective (c'est la restriction) mais non injective ;
3. Si $q(P) = \sup_{x\in[0,2]} \max\{|P(x)|, |P'(x)|\}$, alors $\widehat{\mathcal{P}_q} = \mathcal{C}^1([0,2])$, et $\widehat{i_{pq}}$ (encore la restriction) n'est ni injective ni surjective.

Exemples

1. Soit $\mathcal{P}$ l'espace des fonctions (d'une variable réelle) polynomiales complexes, avec les normes $p(P) = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$ et $q(P) = \sup_{x\in[0,1]} \max\{|P(x)|, |P'(x)|\}$. Le théorème de Stone-Weiertraß implique que le complété de $\mathcal{P}_p$ est $\mathcal{C}^0([0,1])$, alors que celui de $\mathcal{P}_q$ est $\mathcal{C}^1([0,1])$. Dans ce cas, l'application $\widehat{i}_{pq}$ est l'inclusion canonique ;
2. Si $q(P) = \sup_{x\in[0,2]} |P(x)|$, alors $\widehat{\mathcal{P}}_q$ est $\mathcal{C}^0([0,2])$, et $\widehat{i}_{pq}$ est surjective (c'est la restriction) mais non injective ;
3. Si $q(P) = \sup_{x\in[0,2]} \max\{|P(x)|, |P'(x)|\}$, alors $\widehat{\mathcal{P}}_q = \mathcal{C}^1([0,2])$, et $\widehat{i}_{pq}$ (encore la restriction) n'est ni injective ni surjective.

Exemples

1. Soit $\mathcal{P}$ l'espace des fonctions (d'une variable réelle) polynomiales complexes, avec les normes $p(P) = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$ et $q(P) = \sup_{x\in[0,1]} \max\{|P(x)|, |P'(x)|\}$. Le théorème de Stone-Weiertraß implique que le complété de $\mathcal{P}_p$ est $\mathcal{C}^0([0,1])$, alors que celui de $\mathcal{P}_q$ est $\mathcal{C}^1([0,1])$. Dans ce cas, l'application $\widehat{i}_{pq}$ est l'inclusion canonique ;
2. Si $q(P) = \sup_{x\in[0,2]} |P(x)|$, alors $\widehat{\mathcal{P}}_q$ est $\mathcal{C}^0([0,2])$, et $\widehat{i}_{pq}$ est surjective (c'est la restriction) mais non injective ;
3. Si $q(P) = \sup_{x\in[0,2]} \max\{|P(x)|, |P'(x)|\}$, alors $\widehat{\mathcal{P}}_q = \mathcal{C}^1([0,2])$, et $\widehat{i}_{pq}$ (encore la restriction) n'est ni injective ni surjective.

Exemples

1. Soit $\mathcal{P}$ l'espace des fonctions (d'une variable réelle) polynomiales complexes, avec les normes $p(P) = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|$ et $q(P) = \sup_{x \in [0,1]} \max\{|P(x)|, |P'(x)|\}$. Le théorème de Stone-Weiertraß implique que le complété de $\mathcal{P}_p$ est $\mathcal{C}^0([0,1])$, alors que celui de $\mathcal{P}_q$ est $\mathcal{C}^1([0,1])$. Dans ce cas, l'application $\widehat{i}_{pq}$ est l'inclusion canonique ;
2. Si $q(P) = \sup_{x \in [0,2]} |P(x)|$, alors $\widehat{\mathcal{P}}_q$ est $\mathcal{C}^0([0,2])$, et $\widehat{i}_{pq}$ est surjective (c'est la restriction) mais non injective ;
3. Si $q(P) = \sup_{x \in [0,2]} \max\{|P(x)|, |P'(x)|\}$, alors $\widehat{\mathcal{P}}_q = \mathcal{C}^1([0,2])$, et $\widehat{i}_{pq}$ (encore la restriction) n'est ni injective ni surjective.

Exemples

1. Soit $\mathcal{P}$ l'espace des fonctions (d'une variable réelle) polynomiales complexes, avec les normes $p(P) = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|$ et $q(P) = \sup_{x \in [0,1]} \max\{|P(x)|, |P'(x)|\}$. Le théorème de Stone-Weiertraß implique que le complété de $\mathcal{P}_p$ est $\mathcal{C}^0([0,1])$, alors que celui de $\mathcal{P}_q$ est $\mathcal{C}^1([0,1])$. Dans ce cas, l'application $\widehat{i}_{pq}$ est l'inclusion canonique ;
2. Si $q(P) = \sup_{x \in [0,2]} |P(x)|$, alors $\widehat{\mathcal{P}}_q$ est $\mathcal{C}^0([0,2])$, et $\widehat{i}_{pq}$ est surjective (c'est la restriction) mais non injective ;
3. Si $q(P) = \sup_{x \in [0,2]} \max\{|P(x)|, |P'(x)|\}$, alors $\widehat{\mathcal{P}}_q = \mathcal{C}^1([0,2])$, et $\widehat{i}_{pq}$ (encore la restriction) n'est ni injective ni surjective.

Exemples

1. Soit $\mathcal{P}$ l'espace des fonctions (d'une variable réelle) polynomiales complexes, avec les normes $p(P) = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|$ et $q(P) = \sup_{x \in [0,1]} \max\{|P(x)|, |P'(x)|\}$. Le théorème de Stone-Weiertraß implique que le complété de $\mathcal{P}_p$ est $\mathcal{C}^0([0,1])$, alors que celui de $\mathcal{P}_q$ est $\mathcal{C}^1([0,1])$. Dans ce cas, l'application $\widehat{i}_{pq}$ est l'inclusion canonique ;
2. Si $q(P) = \sup_{x \in [0,2]} |P(x)|$, alors $\widehat{\mathcal{P}}_q$ est $\mathcal{C}^0([0,2])$, et $\widehat{i}_{pq}$ est surjective (c'est la restriction) mais non injective ;
3. Si $q(P) = \sup_{x \in [0,2]} \max\{|P(x)|, |P'(x)|\}$, alors $\widehat{\mathcal{P}}_q = \mathcal{C}^1([0,2])$, et $\widehat{i}_{pq}$ (encore la restriction) n'est ni injective ni surjective.

Rappels : les suites de Cauchy

Soit $E_p = (E, p)$ un espace normé. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E est une suite de Cauchy si, et seulement si, quel que soit $\epsilon > 0$, il existe un entier N_ϵ tel que quel que soient $m, n \geq N_\epsilon$, $p(x_m - x_n) < \epsilon$. On note $\mathcal{C}_p(E)$ l'ensemble des suites de Cauchy de l'espace normé (E, p). Un espace normé est complet dès que toutes ses suites de Cauchy sont convergentes (exemples : $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, et contre-exemple : $\mathbb{Q}$). Un espace normé complet est appelé espace de Banach.

Rappels : les suites de Cauchy

Soit $E_p = (E, p)$ un espace normé. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E est une suite de Cauchy si, et seulement si, quel que soit $\epsilon > 0$, il existe un entier N_ϵ tel que quel que soient $m, n \geq N_\epsilon$, $p(x_m - x_n) < \epsilon$. On note $\mathcal{C}_p(E)$ l'ensemble des suites de Cauchy de l'espace normé (E, p). Un espace normé est complet dès que toutes ses suites de Cauchy sont convergentes (exemples : $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, et contre-exemple : $\mathbb{Q}$). Un espace normé complet est appelé espace de Banach.

Rappels : les suites de Cauchy

Soit $E_p = (E, p)$ un espace normé. Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E est une suite de Cauchy si, et seulement si, quel que soit $\epsilon > 0$, il existe un entier N_ϵ tel que quel que soient $m, n \geq N_\epsilon$, $p(x_m - x_n) < \epsilon$.
On note $\mathcal{C}_p(E)$ l'ensemble des suites de Cauchy de l'espace normé (E, p). Un espace normé est complet dès que toutes ses suites de Cauchy sont convergentes (exemples : $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, et contre-exemple : $\mathbb{Q}$). Un espace normé complet est appelé espace de Banach.

Rappels : les suites de Cauchy

Soit $E_p = (E, p)$ un espace normé. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E est une suite de Cauchy si, et seulement si, quel que soit $\epsilon > 0$, il existe un entier N_ϵ tel que quel que soient $m, n \geq N_\epsilon$, $p(x_m - x_n) < \epsilon$. On note $\mathcal{C}_p(E)$ l'ensemble des suites de Cauchy de l'espace normé (E, p). Un espace normé est complet dès que toutes ses suites de Cauchy sont convergentes (exemples : $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, et contre-exemple : $\mathbb{Q}$). Un espace normé complet est appelé espace de Banach.

Rappels : les suites de Cauchy

Soit $E_p = (E, p)$ un espace normé. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E est une suite de Cauchy si, et seulement si, quel que soit $\epsilon > 0$, il existe un entier N_ϵ tel que quel que soient $m, n \geq N_\epsilon$, $p(x_m - x_n) < \epsilon$. On note $\mathcal{C}_p(E)$ l'ensemble des suites de Cauchy de l'espace normé (E, p). Un espace normé est complet dès que toutes ses suites de Cauchy sont convergentes (exemples : $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, et contre-exemple : $\mathbb{Q}$).

Un espace normé complet est appelé espace de Banach.

Rappels : les suites de Cauchy

Soit $E_p = (E, p)$ un espace normé. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E est une suite de Cauchy si, et seulement si, quel que soit $\epsilon > 0$, il existe un entier N_ϵ tel que quel que soient $m, n \geq N_\epsilon$, $p(x_m - x_n) < \epsilon$. On note $\mathcal{C}_p(E)$ l'ensemble des suites de Cauchy de l'espace normé (E, p). Un espace normé est complet dès que toutes ses suites de Cauchy sont convergentes (exemples : $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, et contre-exemple : $\mathbb{Q}$). Un espace normé complet est appelé espace de Banach.

Rappels : complétion d'un espace normé (1/3)

Soit E_p un espace normé. L'ensemble $\mathcal{C}_p(E)$ de ses suites de Cauchy est également un espace vectoriel. On peut le munir de la semi-norme $p'((x_n)_n) = \lim p(x_n)$ (la suite $(p(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergence puisque de Cauchy dans $\mathbb{R}$ complet). Le noyau $\ker p'$ de cette semi-norme est l'espace $\mathcal{C}_{p,0}(E)$ des suites de Cauchy nulles à l'infini. L'espace vectoriel quotient $\mathcal{C}_p(E)/\mathcal{C}_{p,0}(E)$, noté $\widehat{E}_p$, est un espace de Banach appelé complété de E_p dont la norme est $\widehat{p}(x) = p'((x_n)_n)$ pour chaque suite de Cauchy $(x_n)_n$ appartenant à la classe d'équivalence (modulo $\mathcal{C}_{p,0}(E)$) x.

Rappels : complétion d'un espace normé (1/3)

Soit E_p un espace normé. L'ensemble $\mathcal{C}_p(E)$ de ses suites de Cauchy est également un espace vectoriel. On peut le munir de la semi-norme $p'((x_n)_n) = \lim p(x_n)$ (la suite $(p(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergence puisque de Cauchy dans $\mathbb{R}$ complet). Le noyau $\ker p'$ de cette semi-norme est l'espace $\mathcal{C}_{p,0}(E)$ des suites de Cauchy nulles à l'infini. L'espace vectoriel quotient $\mathcal{C}_p(E)/\mathcal{C}_{p,0}(E)$, noté $\widehat{E}_p$, est un espace de Banach appelé complété de E_p dont la norme est $\widehat{p}(x) = p'((x_n)_n)$ pour chaque suite de Cauchy $(x_n)_n$ appartenant à la classe d'équivalence (modulo $\mathcal{C}_{p,0}(E)$) x.

Rappels : complétion d'un espace normé (1/3)

Soit E_p un espace normé. L'ensemble $\mathcal{C}_p(E)$ de ses suites de Cauchy est également un espace vectoriel. On peut le munir de la semi-norme $p'((x_n)_n) = \lim p(x_n)$ (la suite $(p(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergence puisque de Cauchy dans $\mathbb{R}$ complet). Le noyau $\ker p'$ de cette semi-norme est l'espace $\mathcal{C}_{p,0}(E)$ des suites de Cauchy nulles à l'infini. L'espace vectoriel quotient $\mathcal{C}_p(E)/\mathcal{C}_{p,0}(E)$, noté $\widehat{E}_p$, est un espace de Banach appelé complété de E_p dont la norme est $\widehat{p}(x) = p'((x_n)_n)$ pour chaque suite de Cauchy $(x_n)_n$ appartenant à la classe d'équivalence (modulo $\mathcal{C}_{p,0}(E)$) x.

Rappels : complétion d'un espace normé (1/3)

Soit E_p un espace normé. L'ensemble $\mathcal{C}_p(E)$ de ses suites de Cauchy est également un espace vectoriel. On peut le munir de la semi-norme $p'((x_n)_n) = \lim p(x_n)$ (la suite $(p(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergence puisque de Cauchy dans $\mathbb{R}$ complet). Le noyau $\ker p'$ de cette semi-norme est l'espace $\mathcal{C}_{p,0}(E)$ des suites de Cauchy nulles à l'infini. L'espace vectoriel quotient $\mathcal{C}_p(E)/\mathcal{C}_{p,0}(E)$, noté $\widehat{E}_p$, est un espace de Banach appelé complété de E_p dont la norme est $\widehat{p}(x) = p'((x_n)_n)$ pour chaque suite de Cauchy $(x_n)_n$ appartenant à la classe d'équivalence (modulo $\mathcal{C}_{p,0}(E)$) x.

Rappels : complétion d'un espace normé (1/3)

Soit E_p un espace normé. L'ensemble $\mathcal{C}_p(E)$ de ses suites de Cauchy est également un espace vectoriel. On peut le munir de la semi-norme $p'((x_n)_n) = \lim p(x_n)$ (la suite $(p(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergence puisque de Cauchy dans $\mathbb{R}$ complet). Le noyau $\ker p'$ de cette semi-norme est l'espace $\mathcal{C}_{p,0}(E)$ des suites de Cauchy nulles à l'infini. L'espace vectoriel quotient $\mathcal{C}_p(E)/\mathcal{C}_{p,0}(E)$, noté $\widehat{E}_p$, est un espace de Banach appelé complété de E_p dont la norme est $\widehat{p}(x) = p'((x_n)_n)$ pour chaque suite de Cauchy $(x_n)_n$ appartenant à la classe d'équivalence (modulo $\mathcal{C}_{p,0}(E)$) x.

Rappels : complétion d'un espace normé (1/3)

Soit E_p un espace normé. L'ensemble $\mathcal{C}_p(E)$ de ses suites de Cauchy est également un espace vectoriel. On peut le munir de la semi-norme $p'((x_n)_n) = \lim p(x_n)$ (la suite $(p(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergence puisque de Cauchy dans $\mathbb{R}$ complet). Le noyau $\ker p'$ de cette semi-norme est l'espace $\mathcal{C}_{p,0}(E)$ des suites de Cauchy nulles à l'infini. L'espace vectoriel quotient $\mathcal{C}_p(E)/\mathcal{C}_{p,0}(E)$, noté $\widehat{E}_p$, est un espace de Banach appelé complété de E_p dont la norme est $\widehat{p}(x) = p'((x_n)_n)$ pour chaque suite de Cauchy $(x_n)_n$ appartenant à la classe d'équivalence (modulo $\mathcal{C}_{p,0}(E)$) x.

Rappels : complétion d'un espace normé (1/3)

Soit E_p un espace normé. L'ensemble $\mathcal{C}_p(E)$ de ses suites de Cauchy est également un espace vectoriel. On peut le munir de la semi-norme $p'((x_n)_n) = \lim p(x_n)$ (la suite $(p(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergence puisque de Cauchy dans $\mathbb{R}$ complet). Le noyau $\ker p'$ de cette semi-norme est l'espace $\mathcal{C}_{p,0}(E)$ des suites de Cauchy nulles à l'infini. L'espace vectoriel quotient $\mathcal{C}_p(E)/\mathcal{C}_{p,0}(E)$, noté $\widehat{E}_p$, est un espace de Banach appelé complété de E_p dont la norme est $\widehat{p}(x) = p'((x_n)_n)$ pour chaque suite de Cauchy $(x_n)_n$ appartenant à la classe d'équivalence (modulo $\mathcal{C}_{p,0}(E)$) x.

Rappels : complétion d'un espace normé (1/3)

Soit E_p un espace normé. L'ensemble $\mathcal{C}_p(E)$ de ses suites de Cauchy est également un espace vectoriel. On peut le munir de la semi-norme $p'((x_n)_n) = \lim p(x_n)$ (la suite $(p(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergence puisque de Cauchy dans $\mathbb{R}$ complet). Le noyau $\ker p'$ de cette semi-norme est l'espace $\mathcal{C}_{p,0}(E)$ des suites de Cauchy nulles à l'infini. L'espace vectoriel quotient $\mathcal{C}_p(E)/\mathcal{C}_{p,0}(E)$, noté $\widehat{E}_p$, est un espace de Banach appelé complété de E_p dont la norme est $\widehat{p}(x) = p'((x_n)_n)$ pour chaque suite de Cauchy $(x_n)_n$ appartenant à la classe d'équivalence (modulo $\mathcal{C}_{p,0}(E)$) x.

Rappels : complétion d'un espace normé (2/3)

Notons $j_p : E_p \hookrightarrow \mathcal{C}_p(E)$ telle que $j_p(x)$ est la suite de Cauchy "constante", *i.e.*, la suite $x_n = x$ quel que soit n. Soit $s_p : \mathcal{C}_p(E) \to \widehat{E}_p$ l'épimorpisme canonique. On définit $i_p = s_p \circ j_p : E_p \hookrightarrow \widehat{E}_p$. L'image de E_p par i_p est dense dans $\widehat{E}_p$, *i.e.*, tout élément de $\widehat{E}_p$ est limite d'une suite d'éléments de $i_p(E_p)$.

Rappels : complétion d'un espace normé (2/3)

Notons $j_p : E_p \hookrightarrow \mathcal{C}_p(E)$ telle que $j_p(x)$ est la suite de Cauchy "constante", *i.e.*, la suite $x_n = x$ quel que soit n. Soit $s_p : \mathcal{C}_p(E) \to \widehat{E}_p$ l'épimorpisme canonique. On définit $i_p = s_p \circ j_p : E_p \hookrightarrow \widehat{E}_p$. L'image de E_p par i_p est dense dans $\widehat{E}_p$, *i.e.*, tout élément de $\widehat{E}_p$ est limite d'une suite d'éléments de $i_p(E_p)$.

Rappels : complétion d'un espace normé (2/3)

Notons $j_p : E_p \hookrightarrow \mathcal{C}_p(E)$ telle que $j_p(x)$ est la suite de Cauchy "constante", *i.e.*, la suite $x_n = x$ quel que soit n. Soit $s_p : \mathcal{C}_p(E) \to \widehat{E}_p$ l'épimorpisme canonique. On définit $i_p = s_p \circ j_p : E_p \hookrightarrow \widehat{E}_p$. L'image de E_p par i_p est dense dans $\widehat{E}_p$, *i.e.*, tout élément de $\widehat{E}_p$ est limite d'une suite d'éléments de $i_p(E_p)$.

Rappels : complétion d'un espace normé (2/3)

Notons $j_p \colon E_p \hookrightarrow \mathcal{C}_p(E)$ telle que $j_p(x)$ est la suite de Cauchy "constante", *i.e.*, la suite $x_n = x$ quel que soit n. Soit $s_p \colon \mathcal{C}_p(E) \to \widehat{E}_p$ l'épimorpisme canonique. On définit $i_p = s_p \circ j_p \colon E_p \hookrightarrow \widehat{E}_p$. L'image de E_p par i_p est dense dans $\widehat{E}_p$, *i.e.*, tout élément de $\widehat{E}_p$ est limite d'une suite d'éléments de $i_p(E_p)$.

Rappels : complétion d'un espace normé (2/3)

Notons $j_p : E_p \hookrightarrow \mathcal{C}_p(E)$ telle que $j_p(x)$ est la suite de Cauchy "constante", *i.e.*, la suite $x_n = x$ quel que soit n. Soit $s_p : \mathcal{C}_p(E) \rightarrow \widehat{E}_p$ l'épimorpisme canonique. On définit $i_p = s_p \circ j_p : E_p \hookrightarrow \widehat{E}_p$. L'image de E_p par i_p est dense dans $\widehat{E}_p$, *i.e.*, tout élément de $\widehat{E}_p$ est limite d'une suite d'éléments de $i_p(E_p)$.

Rappels : complétion d'un espace normé (2/3)

Le couple $(\widehat{E}_p, i_p)$ est solution du problème universel suivant : soient F un espace de Banach, et $f\colon E_p \to F$ une application linéaire et continue, il existe une et une seule application linéaire et continue $\widehat{f}\colon \widehat{E}_p \to F$ telle que $\widehat{f} \circ i_p = f$. Soit (B, i) une autre solution du même problème universel, alors il existe une unique isométrie linéaire et bijective $\phi\colon \widehat{E}_p \to B$ telle que $\phi \circ i_p = i$. Le complété de E_p est donc unique à isomorphisme près.

Rappels : complétion d'un espace normé (2/3)

Le couple $(\widehat{E}_p, i_p)$ est solution du problème universel suivant : soient F un espace de Banach, et $f : E_p \to F$ une application linéaire et continue, il existe une et une seule application linéaire et continue $\widehat{f} : \widehat{E}_p \to F$ telle que $\widehat{f} \circ i_p = f$. Soit (B, i) une autre solution du même problème universel, alors il existe une unique isométrie linéaire et bijective $\phi : \widehat{E}_p \to B$ telle que $\phi \circ i_p = i$. Le complété de E_p est donc unique à isomorphisme près.

Rappels : complétion d'un espace normé (2/3)

Le couple $(\widehat{E}_p, i_p)$ est solution du problème universel suivant : soient F un espace de Banach, et $f\colon E_p \to F$ une application linéaire et continue, il existe une et une seule application linéaire et continue $\widehat{f}\colon \widehat{E}_p \to F$ telle que $\widehat{f} \circ i_p = f$. Soit (B, i) une autre solution du même problème universel, alors il existe une unique isométrie linéaire et bijective $\phi\colon \widehat{E}_p \to B$ telle que $\phi \circ i_p = i$. Le complété de E_p est donc unique à isomorphisme près.

Rappels : complétion d'un espace normé (2/3)

Le couple $(\widehat{E}_p, i_p)$ est solution du problème universel suivant : soient F un espace de Banach, et $f : E_p \to F$ une application linéaire et continue, il existe une et une seule application linéaire et continue $\widehat{f} : \widehat{E}_p \to F$ telle que $\widehat{f} \circ i_p = f$. Soit (B, i) une autre solution du même problème universel, alors il existe une unique isométrie linéaire et bijective $\phi : \widehat{E}_p \to B$ telle que $\phi \circ i_p = i$. Le complété de E_p est donc unique à isomorphisme près.

Rappels : complétion d'un espace normé (2/3)

Le couple $(\widehat{E_p}, i_p)$ est solution du problème universel suivant : soient F un espace de Banach, et $f : E_p \to F$ une application linéaire et continue, il existe une et une seule application linéaire et continue $\widehat{f} : \widehat{E_p} \to F$ telle que $\widehat{f} \circ i_p = f$. Soit (B, i) une autre solution du même problème universel, alors il existe une unique isométrie linéaire et bijective $\phi : \widehat{E_p} \to B$ telle que $\phi \circ i_p = i$. Le complété de E_p est donc unique à isomorphisme près.

Rappels : complétion d'un espace normé (2/3)

Le couple $(\widehat{E}_p, i_p)$ est solution du problème universel suivant : soient F un espace de Banach, et $f\colon E_p \to F$ une application linéaire et continue, il existe une et une seule application linéaire et continue $\widehat{f}\colon \widehat{E}_p \to F$ telle que $\widehat{f} \circ i_p = f$. Soit (B, i) une autre solution du même problème universel, alors il existe une unique isométrie linéaire et bijective $\phi\colon \widehat{E}_p \to B$ telle que $\phi \circ i_p = i$. Le complété de E_p est donc unique à isomorphisme près.

Rappels : complétion d'un espace normé (2/3)

Le couple $(\widehat{E}_p, i_p)$ est solution du problème universel suivant : soient F un espace de Banach, et $f\colon E_p \to F$ une application linéaire et continue, il existe une et une seule application linéaire et continue $\widehat{f}\colon \widehat{E}_p \to F$ telle que $\widehat{f} \circ i_p = f$. Soit (B, i) une autre solution du même problème universel, alors il existe une unique isométrie linéaire et bijective $\phi\colon \widehat{E}_p \to B$ telle que $\phi \circ i_p = i$. Le complété de E_p est donc unique à isomorphisme près.

Une conséquence de $p \leq q$

Soit E un espace normé par p et q, lesquelles satisfont $p \leq q$. Il s'ensuit que $\mathcal{C}_q(E) \subseteq \mathcal{C}_p(E)$. On note $i'_{pq} : \mathcal{C}_q(E) \hookrightarrow \mathcal{C}_p(E)$ l'injection naturelle.

Une conséquence de $p \leq q$

Soit E un espace normé par p et q, lesquelles satisfont $p \leq q$. Il s'ensuit que $\mathcal{C}_q(E) \subseteq \mathcal{C}_p(E)$. On note $i'_{pq} : \mathcal{C}_q(E) \hookrightarrow \mathcal{C}_p(E)$ l'injection naturelle.

Une conséquence de $p \leq q$

Soit E un espace normé par p et q, lesquelles satisfont $p \leq q$. Il s'ensuit que $\mathcal{C}_q(E) \subseteq \mathcal{C}_p(E)$. On note $i'_{pq} : \mathcal{C}_q(E) \hookrightarrow \mathcal{C}_p(E)$ l'injection naturelle.

Une conséquence de $p \leq q$

Soit E un espace normé par p et q, lesquelles satisfont $p \leq q$. Il s'ensuit que $\mathcal{C}_q(E) \subseteq \mathcal{C}_p(E)$. On note $i'_{pq} : \mathcal{C}_q(E) \hookrightarrow \mathcal{C}_p(E)$ l'injection naturelle.

En fait on montre que $\widehat{E}_q$ est inclus dans $\widehat{E}_p$. Soit en effet $x \in \widehat{E}_q$. Alors par densité de $i_q(E_q)$ dans $\widehat{E}_q$ il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de E_q telle que $\lim_{n\to\infty} i_q(x_n) = x$. Il s'ensuit que $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans E_q (puisque toute suite de Cauchy est convergente). Comme $p \leq q$ implique que $\mathcal{C}_q(E) \subseteq \mathcal{C}_p(E)$, il en résulte que $(x_n)_n$ est de Cauchy dans E_p, et comme $(x_n)_n$ converge vers x dans E_q, il en est de même dans E_p, de sorte que $x \in \widehat{E}_p$.

En fait on montre que $\widehat{E}_q$ est inclus dans $\widehat{E}_p$. Soit en effet $x \in \widehat{E}_q$. Alors par densité de $i_q(E_q)$ dans $\widehat{E}_q$ il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de E_q telle que $\lim_{n\to\infty} i_q(x_n) = x$. Il s'ensuit que $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans E_q (puisque toute suite de Cauchy est convergente). Comme $p \leq q$ implique que $\mathcal{C}_q(E) \subseteq \mathcal{C}_p(E)$, il en résulte que $(x_n)_n$ est de Cauchy dans E_p, et comme $(x_n)_n$ converge vers x dans E_q, il en est de même dans E_p, de sorte que $x \in \widehat{E}_p$.

En fait on montre que $\widehat{E}_q$ est inclus dans $\widehat{E}_p$. Soit en effet $x \in \widehat{E}_q$. Alors par densité de $i_q(E_q)$ dans $\widehat{E}_q$ il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de E_q telle que $\lim_{n\to\infty} i_q(x_n) = x$. Il s'ensuit que $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans E_q (puisque toute suite de Cauchy est convergente). Comme $p \leq q$ implique que $\mathcal{C}_q(E) \subseteq \mathcal{C}_p(E)$, il en résulte que $(x_n)_n$ est de Cauchy dans E_p, et comme $(x_n)_n$ converge vers x dans E_q, il en est de même dans E_p, de sorte que $x \in \widehat{E}_p$.

En fait on montre que $\widehat{E}_q$ est inclus dans $\widehat{E}_p$. Soit en effet $x \in \widehat{E}_q$. Alors par densité de $i_q(E_q)$ dans $\widehat{E}_q$ il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de E_q telle que $\lim_{n\to\infty} i_q(x_n) = x$. Il s'ensuit que $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans E_q (puisque toute suite de Cauchy est convergente). Comme $p \leq q$ implique que $\mathcal{C}_q(E) \subseteq \mathcal{C}_p(E)$, il en résulte que $(x_n)_n$ est de Cauchy dans E_p, et comme $(x_n)_n$ converge vers x dans E_q, il en est de même dans E_p, de sorte que $x \in \widehat{E}_p$.

En fait on montre que $\widehat{E}_q$ est inclus dans $\widehat{E}_p$. Soit en effet $x \in \widehat{E}_q$. Alors par densité de $i_q(E_q)$ dans $\widehat{E}_q$ il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de E_q telle que $\lim_{n\to\infty} i_q(x_n) = x$. Il s'ensuit que $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans E_q (puisque toute suite de Cauchy est convergente). Comme $p \leq q$ implique que $\mathcal{C}_q(E) \subseteq \mathcal{C}_p(E)$, il en résulte que $(x_n)_n$ est de Cauchy dans E_p, et comme $(x_n)_n$ converge vers x dans E_q, il en est de même dans E_p, de sorte que $x \in \widehat{E}_p$.

En fait on montre que $\widehat{E}_q$ est inclus dans $\widehat{E}_p$. Soit en effet $x \in \widehat{E}_q$. Alors par densité de $i_q(E_q)$ dans $\widehat{E}_q$ il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de E_q telle que $\lim_{n\to\infty} i_q(x_n) = x$. Il s'ensuit que $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans E_q (puisque toute suite de Cauchy est convergente). Comme $p \leq q$ implique que $\mathcal{C}_q(E) \subseteq \mathcal{C}_p(E)$, il en résulte que $(x_n)_n$ est de Cauchy dans E_p, et comme $(x_n)_n$ converge vers x dans E_q, il en est de même dans E_p, de sorte que $x \in \widehat{E}_p$.

Très joli mais la preuve est fausse... En effet, si $(x_n)_n$ converge bien vers x c'est le cas dans $\widehat{E}_q$ et absolument pas dans E_q.

Très joli mais la preuve est fausse... En effet, si $(x_n)_n$ converge bien vers x c'est le cas dans $\widehat{E}_q$ et absolument pas dans E_q.

Très joli mais la preuve est fausse... En effet, si $(x_n)_n$ converge bien vers x c'est le cas dans $\widehat{E}_q$ et absolument pas dans E_q.

Retour à la question d'origine

Puisque l'identité $i_{pq} : E_q \longrightarrow E_p$ est continue, il en est de même de l'application injective $i_p \circ i_{pq} : E_q \longrightarrow \widehat{E}_p$. Comme $\widehat{E}_p$ est complet, il existe une unique application linéaire et continue $\widehat{i}_{pq} : \widehat{E}_q \longrightarrow \widehat{E}_p$ telle que $\widehat{i}_{pq} \circ i_q = i_p \circ i_{pq}$. La question de départ est : “ sous quelle hypothèse, $\widehat{i}_{pq}$ est-elle injective ? ”.

Retour à la question d'origine

Puisque l'identité $i_{pq} : E_q \longrightarrow E_p$ est continue, il en est de même de l'application injective $i_p \circ i_{pq} : E_q \longrightarrow \widehat{E}_p$. Comme $\widehat{E}_p$ est complet, il existe une unique application linéaire et continue $\widehat{i}_{pq} : \widehat{E}_q \longrightarrow \widehat{E}_p$ telle que $\widehat{i}_{pq} \circ i_q = i_p \circ i_{pq}$. La question de départ est : “ sous quelle hypothèse, $\widehat{i}_{pq}$ est-elle injective ? ”.

Retour à la question d'origine

Puisque l'identité $i_{pq} : E_q \longrightarrow E_p$ est continue, il en est de même de l'application injective $i_p \circ i_{pq} : E_q \longrightarrow \widehat{E}_p$. Comme $\widehat{E}_p$ est complet, il existe une unique application linéaire et continue $\widehat{i}_{pq} : \widehat{E}_q \longrightarrow \widehat{E}_p$ telle que $\widehat{i}_{pq} \circ i_q = i_p \circ i_{pq}$. La question de départ est : “ sous quelle hypothèse, $\widehat{i}_{pq}$ est-elle injective ? ”.

Retour à la question d'origine

Puisque l'identité $i_{pq} : E_q \longrightarrow E_p$ est continue, il en est de même de l'application injective $i_p \circ i_{pq} : E_q \longrightarrow \widehat{E}_p$. Comme $\widehat{E}_p$ est complet, il existe une unique application linéaire et continue $\widehat{i}_{pq} : \widehat{E}_q \longrightarrow \widehat{E}_p$ telle que $\widehat{i}_{pq} \circ i_q = i_p \circ i_{pq}$. La question de départ est : " sous quelle hypothèse, $\widehat{i}_{pq}$ est-elle injective ? ".

Retour à la question d'origine

Puisque l'identité $i_{pq} : E_q \longrightarrow E_p$ est continue, il en est de même de l'application injective $i_p \circ i_{pq} : E_q \longrightarrow \widehat{E}_p$. Comme $\widehat{E}_p$ est complet, il existe une unique application linéaire et continue $\widehat{i}_{pq} : \widehat{E}_q \longrightarrow \widehat{E}_p$ telle que $\widehat{i}_{pq} \circ i_q = i_p \circ i_{pq}$. La question de départ est : " sous quelle hypothèse, $\widehat{i}_{pq}$ est-elle injective ? ".

Une hypothèse

On dit que deux normes $p \leq q$ sont accordables si quelle que soit la suite de Cauchy pour E_q (et donc pour E_p) qui converge vers zéro dans E_p, cette suite converge également vers zéro dans E_q. ("Accordable" car les deux normes sont **d'accord** au sujet des suites de Cauchy pour q qui convergent vers zéro pour p.)

Une hypothèse

On dit que deux normes $p \leq q$ sont accordables si quelle que soit la suite de Cauchy pour E_q (et donc pour E_p) qui converge vers zéro dans E_p, cette suite converge également vers zéro dans E_q.

(“Accordable” car les deux normes sont **d’accord** au sujet des suites de Cauchy pour q qui convergent vers zéro pour p.)

Une hypothèse

On dit que deux normes $p \leq q$ sont accordables si quelle que soit la suite de Cauchy pour E_q (et donc pour E_p) qui converge vers zéro dans E_p, cette suite converge également vers zéro dans E_q.
("Accordable" car les deux normes sont **d'accord** au sujet des suites de Cauchy pour q qui convergent vers zéro pour p.)

Remarquons que si p, q sont deux normes quelconques accordables sans nécessairement satisfaire $p \leq q$, alors $r = \max\{p, q\}$ définit une norme telle que $p \leq r$, $q \leq r$, et qui est accordable avec les deux autres normes.

Remarquons que si p, q sont deux normes quelconques accordables sans nécessairement satisfaire $p \leq q$, alors $r = \max\{p, q\}$ définit une norme telle que $p \leq r$, $q \leq r$, et qui est accordable avec les deux autres normes.

Remarquons que si p, q sont deux normes quelconques accordables sans nécessairement satisfaire $p \leq q$, alors $r = \max\{p, q\}$ définit une norme telle que $p \leq r, q \leq r$, et qui est accordable avec les deux autres normes.

Remarquons que si p, q sont deux normes quelconques accordables sans nécessairement satisfaire $p \leq q$, alors $r = \max\{p, q\}$ définit une norme telle que $p \leq r$, $q \leq r$, et qui est accordable avec les deux autres normes.

Théorème

Supposons que $p \leq q$ sont deux normes accordables sur un espace E.
Alors l'application $\widehat{i}_{pq} : \widehat{E}_q \to \widehat{E}_p$ est injective.

Théorème

Supposons que $p \leq q$ sont deux normes accordables sur un espace E. Alors l'application $\widehat{i}_{pq} : \widehat{E}_q \to \widehat{E}_p$ est injective.

Preuve

Il est clair que l'on a $\widehat{i}_{pq} \circ s_q = s_p \circ j_{pq}$. Donc $\ker \widehat{i}_{pq} = s_q(\mathcal{C}_q(E) \cap \mathcal{C}_{p,0}(E))$. Or dire que p et q sont accordables signifie que $s_q(\mathcal{C}_q(E) \cap \mathcal{C}_{p,0}(E)) = (0)$.

Preuve

Il est clair que l'on a $\widehat{i}_{pq} \circ s_q = s_p \circ j_{pq}$. Donc $\ker \widehat{i}_{pq} = s_q(\mathcal{C}_q(E) \cap \mathcal{C}_{p,0}(E))$. Or dire que p et q sont accordables signifie que $s_q(\mathcal{C}_q(E) \cap \mathcal{C}_{p,0}(E)) = (0)$.

Preuve

Il est clair que l'on a $\widehat{i}_{pq} \circ s_q = s_p \circ j_{pq}$. Donc $\ker \widehat{i}_{pq} = s_q(\mathcal{C}_q(E) \cap \mathcal{C}_{p,0}(E))$. Or dire que p et q sont accordables signifie que $s_q(\mathcal{C}_q(E) \cap \mathcal{C}_{p,0}(E)) = (0)$.

Remarque

La condition d'accord pour $p \leq q$ est également nécessaire. En effet, si $\ker \widehat{i}_{pq} = (0)$, alors $\mathcal{C}_q(E) \cap \mathcal{C}_{p,0}(E) \subseteq \mathcal{C}_{q,0}(E)$.

Remarque

La condition d'accord pour $p \leq q$ est également nécessaire. En effet, si $\ker \widehat{i}_{pq} = (0)$, alors $\mathcal{C}_q(E) \cap \mathcal{C}_{p,0}(E) \subseteq \mathcal{C}_{q,0}(E)$.

Corollaire

Sous les mêmes hypothèse que l'exemple précédent, l'espace $\widehat{E}_q$ s'identifie à un sous-espace de $\widehat{E}_p$ partout dense.

Preuve

On a $i_q(E_q) \subseteq \widehat{E}_q$, donc $i_p(E_p) = i_p(i_{pq}(E_q)) = \widehat{i_{pq}}(i_q(E_q)) \subseteq \widehat{i_{pq}}(\widehat{E}_q)$.
De $i_p(E_p) \subseteq \widehat{i_{pq}}(\widehat{E}_q) \subseteq \widehat{E}_p$, on en déduit que

$$\widehat{E}_p = \overline{i_p(E_p)}^{\widehat{E}_p} \subseteq \overline{\widehat{i_{pq}}(\widehat{E}_q)}^{\widehat{E}_p} \subseteq \widehat{E}_p.$$

Preuve

On a $i_q(E_q) \subseteq \widehat{E}_q$, donc $i_p(E_p) = i_p(i_{pq}(E_q)) = \widehat{i}_{pq}(i_q(E_q)) \subseteq \widehat{i}_{pq}(\widehat{E}_q)$.
De $i_p(E_p) \subseteq \widehat{i}_{pq}(\widehat{E}_q) \subseteq \widehat{E}_p$, on en déduit que

$$\widehat{E}_p = \overline{i_p(E_p)}^{\widehat{E}_p} \subseteq \overline{\widehat{i}_{pq}(\widehat{E}_q)}^{\widehat{E}_p} \subseteq \widehat{E}_p.$$

Preuve

On a $i_q(E_q) \subseteq \widehat{E}_q$, donc $i_p(E_p) = i_p(i_{pq}(E_q)) = \widehat{i}_{pq}(i_q(E_q)) \subseteq \widehat{i}_{pq}(\widehat{E}_q)$.
De $i_p(E_p) \subseteq \widehat{i}_{pq}(\widehat{E}_q) \subseteq \widehat{E}_p$, on en déduit que

$$\widehat{E}_p = \overline{i_p(E_p)}^{\widehat{E}_p} \subseteq \overline{\widehat{i}_{pq}(\widehat{E}_q)}^{\widehat{E}_p} \subseteq \widehat{E}_p.$$

Preuve

On a $i_q(E_q) \subseteq \widehat{E}_q$, donc $i_p(E_p) = i_p(i_{pq}(E_q)) = \widehat{i}_{pq}(i_q(E_q)) \subseteq \widehat{i}_{pq}(\widehat{E}_q)$.
De $i_p(E_p) \subseteq \widehat{i}_{pq}(\widehat{E}_q) \subseteq \widehat{E}_p$, on en déduit que

$$\widehat{E}_p = \overline{i_p(E_p)}^{\widehat{E}_p} \subseteq \overline{\widehat{i}_{pq}(\widehat{E}_q)}^{\widehat{E}_p} \subseteq \widehat{E}_p.$$

Preuve

On a $i_q(E_q) \subseteq \widehat{E}_q$, donc $i_p(E_p) = i_p(i_{pq}(E_q)) = \widehat{i}_{pq}(i_q(E_q)) \subseteq \widehat{i}_{pq}(\widehat{E}_q)$.
De $i_p(E_p) \subseteq \widehat{i}_{pq}(\widehat{E}_q) \subseteq \widehat{E}_p$, on en déduit que

$$\widehat{E}_p = \overline{i_p(E_p)}^{\widehat{E}_p} \subseteq \overline{\widehat{i}_{pq}(\widehat{E}_q)}^{\widehat{E}_p} \subseteq \widehat{E}_p.$$

Preuve

On a $i_q(E_q) \subseteq \widehat{E}_q$, donc $i_p(E_p) = i_p(i_{pq}(E_q)) = \widehat{i}_{pq}(i_q(E_q)) \subseteq \widehat{i}_{pq}(\widehat{E}_q)$.
De $i_p(E_p) \subseteq \widehat{i}_{pq}(\widehat{E}_q) \subseteq \widehat{E}_p$, on en déduit que

$$\widehat{E}_p = \overline{i_p(E_p)}^{\widehat{E}_p} \subseteq \overline{\widehat{i}_{pq}(\widehat{E}_q)}^{\widehat{E}_p} \subseteq \widehat{E}_p.$$

Preuve

On a $i_q(E_q) \subseteq \widehat{E}_q$, donc $i_p(E_p) = i_p(i_{pq}(E_q)) = \widehat{i}_{pq}(i_q(E_q)) \subseteq \widehat{i}_{pq}(\widehat{E}_q)$.
De $i_p(E_p) \subseteq \widehat{i}_{pq}(\widehat{E}_q) \subseteq \widehat{E}_p$, on en déduit que
$\widehat{E}_p = \overline{i_p(E_p)}^{\widehat{E}_p} \subseteq \overline{\widehat{i}_{pq}(\widehat{E}_q)}^{\widehat{E}_p} \subseteq \widehat{E}_p$.